

Estimasi Kurva Regresi Nonparametrik Spline Truncated Multirespon (Aplikasi Pada Kasus Nilai UNAS SMKN 3 Buduran Sidoarjo)

Rosalina Salhuteru, I Nyoman Budiantara², Ismaini Zain²

Jurusan Statistika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Jl. Arief Rahman Hakim, Surabaya 60111, Indonesia

Ochasalhuteru@rocketmail.com

Analisis regresi merupakan salah satu metode statistika yang banyak dipergunakan untuk menyelidiki pola hubungan antara variabel prediktor dengan variabel respon. Jika bentuk pola data diketahui maka digunakan pendekatan regresi parametrik, tetapi jika pola data tidak diketahui polanya digunakan regresi nonparametrik. Regresi nonparametrik merupakan teknik yang dapat mengatasi kesulitan dalam teknik regresi parametrik dimana bentuk fungsi kurva regresi harus diketahui. Regresi nonparametrik multirespon merupakan analisis regresi dimana fungsi regresi tidak diketahui bentuknya dan antar variabel respon saling berkorelasi. Spline pada hakekatnya adalah generalisasi dari fungsi polinomial, dimana optimasinya masih mengadopsi konsep dalam regresi parametrik. Pendekatan spline dapat mengatasi pola data yang menunjukkan naik/turun dengan menggunakan titik knot. Kelebihan dari spline adalah dapat mengatasi pola data yang menunjukkan adanya perubahan perilaku pada sub-sub interval tertentu dengan bantuan titik-titik knot, serta kurva yang dihasilkan relatif smooth. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mendapatkan model estimasi kurva regresi nonparametrik spline *truncated* multirespon. Data yang digunakan adalah data UNAS SMKN 3 Buduran Sidoarjo dimana variabel responnya adalah nilai UNAS Matematika, Bahasa Indonesia, Bahasa Inggris, dan Teori Kejuruan sedangkan variabel prediktornya adalah rata-rata nilai rapor kelas III dan nilai UAS. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa model spline terbaik adalah model spline linier dua titik knot, dengan nilai GCV minimum sebesar 1,320052 dan R^2 65.45

Kata Kunci : Multirepon, Regresi Nonparametrik, Spline, *Generalized Cross Validation*, Titik Knot

I. PENDAHULUAN

Analisis regresi merupakan salah satu metode statistika yang banyak digunakan untuk menyelidiki pola hubungan antara variabel prediktor dengan variabel respon. Bentuk pola hubungan fungsional antara variabel prediktor dengan variabel respon dapat diperkirakan dengan membuat diagram pencar (*scatter plot*) yang memuat informasi tentang kedua hubungan tersebut. Jika pola hubungan data diketahui maka dapat digunakan pendekatan regresi parameterik, tetapi jika pola hubungan keduanya tidak dapat diketahui bentuknya maka dapat digunakan regresi nonparametrik ([1];[2]). Dalam regresi parametrik bentuk kurva regresi diasumsikan diketahui. Untuk dapat menggunakan metode regresi parametrik, diperlukan pengetahuan masa lalu tentang karakteristik data yang akan diselidiki. Sementara regresi nonparametrik bentuk kurva regresi diasumsikan tidak diketahui. Kurva regresi nonparametrik hanya diasumsikan mulus atau termuat dalam suatu ruang fungsi tertentu. Regresi nonparametrik memiliki fleksibilitas yang tinggi [1]. Model regresi nonparameterik mempunyai latar belakang tersendiri dalam memperoleh estimasi kurva regresi. Berkaitan dengan pengestimasi kurva regresi tersebut, terdapat beberapa teknik estimasi dalam regresi nonparametrik antara lain histogram, spline, kernel, deret orthogonal, wavelet dan lain-lain. Beberapa aplikasi metode regresi nonparametrik khususnya Spline telah banyak digunakan dalam berbagai bidang ilmu, seperti bidang kedokteran, ekonomi, farmakologi, dan sebagainya. Spline pada hakekatnya adalah generalisasi dari fungsi polinomial, dimana optimasinya masih mengadopsi konsep dalam regresi parametrik. Pendekatan spline dapat mengatasi pola data yang menunjukkan naik/turun menggunakan titik-titik knot. Kelebihan dari spline adalah dapat mengatasi pola data yang menunjukkan adanya perubahan perilaku pada sub-sub interval tertentu dengan bantuan titik-titik knot, serta kurva yang dihasilkan relatif *smooth* [3].

Banyak kasus pada dunia nyata yang tidak dapat diselesaikan dengan analisis regresi sederhana satu respon. Misal, jika ada korelasi antara variabel respon, jika dianalisis secara terpisah atau parsial maka tidak akan menghasilkan model yang optimal. Model regresi nonparametrik multirespon adalah model regresi dengan lebih dari satu variabel respon yang saling berkorelasi dengan satu atau lebih variabel prediktor [4]. Model regresi nonparametrik multirespon telah diteliti oleh beberapa penelitian diantaranya [5] tentang *Spline Smoothing for Bivariate Data With Applications to Association Between Hormones* dan [6] tentang estimator spline dalam regresi nonparametrik multirespon. Salah satu pendekatan yang dapat digunakan untuk estimasi parameter dalam model regresi nonparametrik multirespon adalah regresi spline *truncated*. Pendekatan regresi spline *truncated* mempunyai beberapa kelebihan diantaranya adalah lebih mudah secara matematis dan interpretasinya hampir sama pada regresi parametrik. Dalam penelitian ini regresi spline *truncated* akan digunakan untuk memodelkan Nilai UNAS. Salah satu aplikasi dapat diterapkan pada sistem nilai Ujian Nasional karena variabel respon lebih dari satu yang dapat dikaitkan dengan multirespon dan multivariabel prediktor.

Nilai ujian nasional adalah sebuah sistem target evaluasi standar pendidikan dasar dan menengah yang diselenggarakan menyeluruh secara nasional.

Ada beberapa penelitian tentang hasil belajar siswa atau nilai ujian Nasional. Beberapa penelitian yang telah dilakukan untuk melihat faktor-faktor yang mempengaruhi prestasi belajar siswa diantaranya oleh [7] tentang faktor-faktor yang mempengaruhi prestasi belajar siswa menggunakan metode regresi logistik. menggunakan *multigroup structural equation model* untuk membandingkan hasil belajar siswa yang berasal dari sekolah negeri dan sekolah swasta [8]. Melakukan penelitian tentang pemodelan nilai UNAS SMK Negeri 3 Buduran Sidoarjo dengan pendekatan regresi Spline [9]. Pemodelan nilai UNAS SMAN 11 Ambon dengan pendekatan regresi Nonparametrik Spline [10]. Melakukan penelitian estimasi parameter model regresi Spline [11]. Oleh karena itu, penelitian ini bertujuan untuk mengkaji bentuk estimasi kurva regresi nonparametrik spline *truncated* multirespon dan mengaplikasikannya pada data nilai UNAS.

II. TINJAUAN PUSTAKA

A. Regresi Nonparametrik Spline

Beberapa model pendekatan regresi nonparametrik yang telah dikembangkan oleh para peneliti salah satunya adalah spline. Spline merupakan salah satu teknik estimasi regresi nonparametrik yang pertama kali dikembangkan oleh Whittaker pada tahun 1923 [3]. Spline dalam regresi nonparametrik mempunyai kemampuan mengestimasi perilaku data yang cenderung berbeda pada interval yang berlainan ([1],[2]). Suatu basis untuk ruang spline berorde m dapat dinyatakan dalam bentuk [2]:

$$\{1, x, \dots, x^m, (x - k_1)_+^m, \dots, (x - k_r)_+^m\}.$$

Fungsi *truncated* (potongan-potongan):

$$(x - k_h)_+^m = \begin{cases} (x - k_h)^m, & x \geq k_h \\ 0, & x < k_h \end{cases}$$

Dan k_1, k_2, \dots, k_r merupakan titik-titik knot. Titik knot merupakan titik perpaduan bersama yang memperlihatkan terjadinya perubahan pola perilaku dari fungsi *spline* pada interval-interval yang berbeda. Menurut [1] secara umum fungsi spline berorde m adalah sembarang fungsi yang dapat ditulis dalam bentuk:

$$f(x_i) = \sum_{j=0}^m \beta_j x_i^j + \sum_{h=1}^r \beta_{h+m} (x_i - k_h)_+^m \quad (1) \text{ dengan } \beta_j \text{ adalah parameter dari fungsi spline.}$$

$j = 0, 1, \dots, m, m+1, \dots, m+r$, merupakan konstanta yang bernilai real. Model regresi spline dapat disajikan sebagaimana Persamaan 1.

$$y_i = \sum_{j=0}^m \beta_j x_i^j + \sum_{h=1}^r \beta_{h+m} (x_i - k_h)_+^m + \varepsilon_i \quad (2)$$

Apabila sisaan ε_i diasumsikan berdistribusi normal independen dengan mean nol dan variansi σ_i^2 maka y_i juga juga berdistribusi normal dengan mean $f(x_i)$ dan variansi σ_i^2 .

B. Regresi Nonparametrik Multirespon

Model regresi nonparametrik multirespon disajikan sebagaimana persamaan (3) berikut.

$$y_{ji} = f_k(x_{kji}) + \varepsilon_{ji} \quad (3)$$

Dimana y_{ji} merupakan variabel respon ke- j pada data ke- i , $f_k(x_{kji})$ merupakan fungsi regresi yang tidak diketahui bentuknya, x_{kji} merupakan variabel prediktor dan ε_{ji} adalah error random $i=1,2,\dots,n$ dan $j=1,2,\dots,p$. Jika f_k dengan fungsi spline maka akan diperoleh model regresi nonparametrik multirespon spline.

1. Korelasi antara Variabel-Variabel Respon

Sebelum melakukan pemodelan, terlebih dahulu perlu diketahui besar hubungan atau korelasi antar variabel-variabel tersebut. Ini sesuai dengan definisi regresi bi-respon yaitu regresi dengan variabel respon dua dan diantara variabel-variabel respon harus memiliki korelasi antara satu dengan lainnya. Untuk mengetahui nilai korelasinya dapat digunakan koefisien korelasi Pearson yang secara umum memiliki persamaan sebagaimana persamaan (4) berikut.

$$r(y_1, y_2) = \frac{\text{cov}(y_1, y_2)}{\{(\text{var}(y_1)\text{var}(y_2))\}^{\frac{1}{2}}} \quad (4)$$

Berdasarkan perhitungan dengan korelasi Pearson, maka akan diperoleh nilai koefisien korelasi. Berdasarkan nilai ini dapat diketahui kedekatan hubungan antara variabel-variabel respon yang digunakan. Nilai koefisien korelasi yang dihasilkan berkisar antara -1 sampai dengan 1. Apabila nilai koefisien korelasi mendekati -1 atau 1 maka hubungan atau

korelasi antara variabel-variabel respon semakin kuat, sedangkan jika nilai koefisien korelasi mendekati 0 maka hubungan atau korelasi antara variabel-variabel respon semakin lemah [12]

2. Korelasi antara variabel prediktor (Multikolinieritas)

Salah satu syarat yang harus terpenuhi dalam pemodelan regresi yang baik adalah tidak adanya korelasi antar variabel independen. Multikolinearitas adalah kondisi terdapatnya hubungan linier atau korelasi yang tinggi antara masing-masing variabel independen dalam model regresi. Multikolinearitas biasanya terjadi ketika sebagian besar variabel yang digunakan saling terkait dalam suatu model regresi. Adanya kasus multikolinearitas dapat dilihat dari Nilai variance inflation factor (VIF) lebih dari 10. VIF dapat dirumuskan sebagai berikut

R adalah nilai koefisien determinasi antara variabel j X dengan variabel X lainnya. VIF yang lebih besar dari 10 menunjukkan multikolinearitas antara variabel-variabel independen. Selain itu juga dapat dilihat dengan keterkaitan antar variabel dengan korelasi masing-masing variabel. Korelasi adalah metode untuk mengetahui tingkat keeratan hubungan dua variabel atau lebih yang digambarkan oleh besarnya koefisien korelasi. Koefisien korelasi adalah koefisien yang menggambarkan tingkat keeratan hubungan antar dua variabel atau lebih. Besaran dari koefisien korelasi tidak menggambarkan hubungan sebab akibat antar dua variabel atau lebih tetapi menggambarkan keterkaitan linear antar variabel. Dimana nilai koefisien korelasi pearson ($ij\ r$) antar variabel-variabel independen lebih dari 95%. Rumus korelasi pearson adalah sebagai berikut sebagaimana persamaan (5).

$$VIF = \frac{1}{1 - R_j^2} \quad (5)$$

R_j^2 adalah nilai koefisien determinasi X_j dengan variabel X lainnya. VIF yang lebih besar dari 10 menunjukkan multikolinieritas antara variabel-variabel independen.

3. Estimasi Parameter

Parameter populasi tidak diketahui, maka harus diestimasi dengan menggunakan data sampel. Suatu $\hat{\beta}$ disebut estimasi untuk parameter populasi β . Statistik yang digunakan untuk memperoleh sebuah nilai estimasi disebut estimator. Sifat yang seharusnya dimiliki oleh suatu estimator yang baik adalah menghasilkan nilai estimasi parameter yang bersifat tak bias. Statistik $\hat{\beta}$ dikatakan estimator tak bias untuk parameter β jika $(\hat{\beta}) = \beta$. Jika terdapat dua atau lebih estimator yang tak bias maka, penduga paling efisien adalah penduga yang memiliki ragam terkecil (Walpole, 1982). Pada metode OLS, *error* diasumsikan identik (homogenitas dalam variansi *error*). *Error* tidak identik mengakibatkan $\text{var}(\varepsilon_i)$ tidak sama untuk setiap i , dinotasikan $\text{var}(\varepsilon_i) = \sigma_i^2$. Agar ε_i memenuhi asumsi identik maka dilakukan transformasi dengan cara mengalikan ε_i dengan $w_i^{1/2}$ atau vektor ε dengan matriks P^{-1} dari sisi kiri. P adalah matriks diagonal dengan elemen $w_i^{-1/2}$ dan w_i komponen kolom W . Matriks diagonal yang elemennya terdiri dari komponen vektor W disebut matriks pembobot. Metode *Weighted Least Square* (WLS) mengestimasi parameter dengan meminimumkan:

$$\varepsilon^T W \varepsilon = (Y - X\beta)^T W (Y - X\beta)$$

4. Pengujian Signifikansi Secara Parsial

Misalkan β adalah suatu parameter pada model regresi nonparametrik dan $\hat{\beta}$ adalah taksiran dari β maka pengujian signifikansi parameter dapat dinyatakan sebagai berikut.

Hipotesis :

$H_0 : \beta = 0$ atau parameter tidak signifikan

$H_1 : \beta \neq 0$ atau parameter signifikan

Statistik uji :

$$t = \frac{\hat{\beta}}{SE(\hat{\beta})},$$

daerah penolakan : tolak H_0 jika nilai $|t| > t_{\alpha/2, n-n_p}'$,

dengan:

$SE(\hat{\beta})$ = standar *error* dari nilai taksiran β

n_p = banyaknya parameter yang ditaksir

C. Pemilihan Titik Knot Optimal

Pemilihan titik knot yang optimal yang sangat penting dalam regresi spline. Titik knot merupakan titik perpaduan bersama dimana terdapat perubahan perilaku fungsi pada interval yang berlainan [1]. Salah satu metode pemilihan titik knot optimal adalah *Generalized Cross Validation* (GCV) [1]. Model spline yang sesuai dengan titik knot optimal didapat dari nilai GCV terkecil.

Fungsi GCV didefinisikan sebagai berikut:

$$GCV(k) = \frac{MSE(k)}{(n^{-1}tr[I - A(k)])^2}$$

D. Pola Hubungan Antara Variabel Prediktor

Nilai UNAS SMK adalah nilai yang diperoleh siswa setelah melakukan kegiatan pembelajaran selama tiga tahun pada jenjang SMK. Secara nasional mencakup pelajaran Bahasa Indonesia, Bahasa Inggris, Matematika, dan mata pelajaran kejuruan yang menjadi ciri khas program pendidikan [14] Faktor-faktor yang diasumsikan mempengaruhi nilai UNAS SMK [9] diantaranya sebagai berikut:

- Nilai rata-rata rapor
- Nilai Ujian Akhir Sekolah
- Nilai rata-rata tryout
- Nilai rata-rata UN SMP

III. METODOLOGI

1. Mendapatkan estimasi model regresi nonparametrik Spline *truncated* multirespon dengan langkah-langkah sebagai berikut:

a. Membuat model regresi nonparametrik multirespon.

$$y_{ji} = \sum_{k=1}^m f_k(x_{kji}) + \varepsilon_{ji}, i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, p$$

b. Mendekati komponen nonparametrik dengan fungsi Spline *truncated*.

$$f_k(x_{kji}) = \alpha_{kj}x_{kji} + \sum_{u=1}^U \beta_{kju}(x_{kji} - K_{kU})_+^1$$

c. Model regresi nonparametrik multirespon ditulis kedalam bentuk matriks

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}[\mathbf{K}]\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

dimana $\mathbf{y} = [\mathbf{y}_1^T : \mathbf{y}_2^T : \dots : \mathbf{y}_p^T]^T$, $\boldsymbol{\varepsilon} = [\boldsymbol{\varepsilon}_1^T : \boldsymbol{\varepsilon}_2^T : \dots : \boldsymbol{\varepsilon}_p^T]^T$

d. Menyelesaikan estimasi model dengan optimasi WLS:

$$\min_{\boldsymbol{\beta}} \{(\mathbf{Y} - \mathbf{X}[\mathbf{K}]\boldsymbol{\beta})^T \mathbf{W}(\mathbf{Y} - \mathbf{X}[\mathbf{K}]\boldsymbol{\beta})\}$$

Optimasi diselesaikan menggunakan derivatif parsial

e. Mendapatkan bentuk estimasi kurva regresi nonparametrik multirespon sebagai berikut:

$$\hat{y}_{ji} = \sum_{k=1}^m \left\{ \alpha_{kj}x_{kji} + \sum_{u=1}^U \beta_{kju}(x_{kji} - K_{kU})_+^1 \right\}$$

2. Memodelkan nilai UNAS SMKN 3 Buduran Sidoarjo menggunakan regresi nonparametrik spline *truncated* multirespon

- Melakukan analisis deskriptif pada tiap variabel respon dan variabel prediktor.
- Menguji korelasi antar respon.
- Membuat *scatter* plot antara variabel respon dengan variabel prediktor untuk mengetahui perilaku data.
- Memodelkan nilai UNAS SMKN 3 Buduran Sidoarjo menggunakan regresi nonparametrik multirespon spline.
- Memilih titik knot optimal dengan menggunakan metode GCV.
- Membentuk model regresi nonparametrik spline *truncated* multirespon yang terbaik
- Mencari estimasi model regresi $\hat{\mathbf{y}}$
- Menghitung nilai ukuran kebaikan model dengan MSE

IV. ANALISIS DAN PEMBAHASAN

A. Estimasi Model Regresi Nonparametrik Spline Truncated

Diberikan data berpasangan $(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_p)$. Hubungan antara $(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_p)$ diasumsikan mengikuti model regresi nonparametrik multirespon sebagai berikut:

$$y_{ji} = \sum_{k=1}^m f_k(x_{kji}) + \varepsilon_{ji}, i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, p$$

Selanjutnya kurva regresi $f_k(x_{kji})$ dihampiri dengan fungsi *Spline truncated* linier dan titik-titik knot k_1, k_2, \dots, k_U :

$$f_k(x_{kji}) = \alpha_{kj}x_{kji} + \sum_{u=1}^U \beta_{kju}(x_{kji} - K_{ku})_+^1$$

Fungsi *truncated* $(x_{kji} - K_{ku})_+^1$ didefinisikan sebagai

$$(x_{kji} - K_{ku})_+^1 = \begin{cases} (x_{kji} - K_{ku})_+^1, & x_{kji} \geq K_{ku} \\ 0, & x_{kji} < K_{ku} \end{cases}$$

Akibatnya diperoleh regresi nonparametrik *spline truncated* multirespon yang dapat disajikan sebagai berikut:

$$y_{ji} = \sum_{k=1}^m \left\{ \alpha_{kj}x_{kji} + \sum_{u=1}^U \beta_{kju}(x_{kji} - K_{ku})_+^1 \right\} + \varepsilon_{ji}$$

Model ini memuat p respon dengan sebanyak n pengamatan dan dapat diuraikan sebagai berikut:

$$\text{Untuk } i = 1 \text{ dan } j = 1 : y_{11} = \sum_{k=1}^m \left\{ \alpha_{k1}x_{k11} + \sum_{u=1}^U \beta_{k1u}(x_{k11} - K_{ku})_+^1 \right\} + \varepsilon_{11}$$

⋮

$$i = 1 \text{ dan } j = p : y_{p1} = \sum_{k=1}^m \left\{ \alpha_{kp}x_{kp1} + \sum_{u=1}^U \beta_{kpu}(x_{kp1} - K_{ku})_+^1 \right\} + \varepsilon_{p1}$$

$$i = 2 \text{ dan } j = 1 : y_{12} = \sum_{k=1}^m \left\{ \alpha_{k1}x_{k12} + \sum_{u=1}^U \beta_{k1u}(x_{k12} - K_{ku})_+^1 \right\} + \varepsilon_{12}$$

⋮

$$i = 2 \text{ dan } j = p : y_{p2} = \sum_{k=1}^m \left\{ \alpha_{kp}x_{kp2} + \sum_{u=1}^U \beta_{kpu}(x_{kp2} - K_{ku})_+^1 \right\} + \varepsilon_{p2}$$

⋮

$$i = n \text{ dan } j = 1 : y_{1n} = \sum_{k=1}^m \left\{ \alpha_{k1}x_{k1n} + \sum_{u=1}^U \beta_{k1u}(x_{k1n} - K_{ku})_+^1 \right\} + \varepsilon_{1n}$$

⋮

$$i = n \text{ dan } j = p : y_{pn} = \sum_{k=1}^m \left\{ \alpha_{kp}x_{kpn} + \sum_{u=1}^U \beta_{kpu}(x_{kpn} - K_{ku})_+^1 \right\} + \varepsilon_{pn}$$

Model regresi multirespon diatas dapat disajikan dalam bentuk matriks berikut:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}[K]\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix}, \mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ \vdots \\ y_{1n} \end{bmatrix}, \mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} y_{21} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{2n} \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{y}_p = \begin{bmatrix} y_{p1} \\ y_{p2} \\ \vdots \\ y_{pn} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_p \end{bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}_1 = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \vdots \\ \varepsilon_{1n} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \begin{bmatrix} \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \\ \vdots \\ \varepsilon_{2n} \end{bmatrix}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_p = \begin{bmatrix} \varepsilon_{p1} \\ \varepsilon_{p2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{pn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}[K] = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1[K] & \vdots & \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{0} \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{X}_2[K] & \vdots & \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{0} \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{0} & \vdots & \dots & \vdots & \mathbf{X}_p[K] \end{pmatrix}$$

Selanjutnya dengan menggunakan matriks pembobot \mathbf{W} , estimasi $\boldsymbol{\beta}$ pada persamaan diatas dapat diperoleh dengan menyelesaikan optimasi WLS

$$\min_{\boldsymbol{\beta}} \{ (\mathbf{Y} - \mathbf{X}[K]\boldsymbol{\beta})^T \mathbf{W} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}[K]\boldsymbol{\beta}) \}$$

Dari model diatas didapat error:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Y} - \mathbf{X}[K]\boldsymbol{\beta}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{W} \boldsymbol{\varepsilon} &= (\mathbf{Y} - \mathbf{X}[K]\boldsymbol{\beta})^T \mathbf{W} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}[K]\boldsymbol{\beta}) \\ &= (\mathbf{Y}^T - \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}^T[K]) \mathbf{W} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}[K]\boldsymbol{\beta}) \\ &= \mathbf{Y}^T \mathbf{W} \mathbf{Y} - \mathbf{Y}^T \mathbf{W} \mathbf{X}[K]\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}^T[K] \mathbf{W} \mathbf{Y} + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}^T[K] \mathbf{W} \mathbf{X}[K]\boldsymbol{\beta} \\ &= \mathbf{Y}^T \mathbf{W} \mathbf{Y} - (\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}^T[K] \mathbf{W} \mathbf{Y})^T - \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}^T[K] \mathbf{W} \mathbf{Y} + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}^T[K] \mathbf{W} \mathbf{X}[K]\boldsymbol{\beta} \\ &= \mathbf{Y}^T \mathbf{W} \mathbf{Y} - \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}^T[K] \mathbf{W} \mathbf{Y} - \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}^T[K] \mathbf{W} \mathbf{Y} + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}^T[K] \mathbf{W} \mathbf{X}[K]\boldsymbol{\beta} \\ &= \mathbf{Y}^T \mathbf{W} \mathbf{Y} - 2\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}^T[K] \mathbf{W} \mathbf{Y} + 2\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}^T[K] \mathbf{W} \mathbf{X}[K]\boldsymbol{\beta} \end{aligned}$$

Untuk mendapatkan estimator dari parameter $\boldsymbol{\beta}$ dilakukan dengan melakukan derivatif parsial terhadap $\boldsymbol{\beta}$. Dalam proses derivatif ini digunakan suatu Teorema dari [15]. Diberikan vektor $\boldsymbol{\beta}$ dan matriks \mathbf{A} , maka:

$$(i) \frac{\partial(\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{A})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \mathbf{A}$$

$$(ii) \frac{\partial(\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = 2\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}$$

Sebagai konsep dasar kemudian hasilnya disamakan dengan nol maka diperoleh:

$$\frac{\partial(\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{W} \boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = 0 - 2\mathbf{X}^T[K] \mathbf{W} \mathbf{Y} + 2\mathbf{X}^T[K] \mathbf{W} \mathbf{X}[K]\boldsymbol{\beta}$$

$$\mathbf{0} = -2\mathbf{X}^T[K] \mathbf{W} \mathbf{Y} + 2\mathbf{X}^T[K] \mathbf{W} \mathbf{X}[K]\hat{\boldsymbol{\beta}}$$

$$2\mathbf{X}^T[K] \mathbf{W} \mathbf{Y} = 2\mathbf{X}^T[K] \mathbf{W} \mathbf{X}[K]\hat{\boldsymbol{\beta}}$$

$$\mathbf{X}^T[K] \mathbf{W} \mathbf{Y} = \mathbf{X}^T[K] \mathbf{W} \mathbf{X}[K]\hat{\boldsymbol{\beta}}$$

Kemudian kedua ruas dikalikan dari kanan dengan $(\mathbf{X}^T[K] \mathbf{W} \mathbf{X}[K])^{-1}$

$$(\mathbf{X}^T[K] \mathbf{W} \mathbf{X}[K])^{-1} \mathbf{X}^T[K] \mathbf{W} \mathbf{Y} = (\mathbf{X}^T[K] \mathbf{W} \mathbf{X}[K])^{-1} (\mathbf{X}^T[K] \mathbf{W} \mathbf{X}[K])\hat{\boldsymbol{\beta}}$$

$$(\mathbf{X}^T[K] \mathbf{W} \mathbf{X}[K])^{-1} \mathbf{X}^T[K] \mathbf{W} \mathbf{Y} = \hat{\boldsymbol{\beta}}$$

Akhirnya diperoleh

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^T[K] \mathbf{W} \mathbf{X}[K])^{-1} \mathbf{X}^T[K] \mathbf{W} \mathbf{Y}$$

Berdasarkan estimasi $\boldsymbol{\beta}$ diatas, maka diperoleh estimasi kurva regresi:

$$\hat{Y} = X[K]\hat{\beta}$$

$$= X[K](X[K]^T W X[K])^{-1} X[K]^T W Y$$

$$= A[K]Y$$

Dimana,

$$A[K] = X[K](X[K]^T W X[K])^{-1} X[K]^T W$$

Dengan W matriks varian kovarian dari Y

Berdasarkan hasil yang diperoleh terlihat bahwa estimator ini tergantung pada titik knot. Pemilihan titik knot optimal dengan metode *Generalized Cross Validation* (GCV).

$$GCV(K) = \frac{MSE(K)}{(N^{-1} \text{trace}(\mathbf{I} - A[K]))^2}$$

$$\text{Dimana } MSE[K] = N^{-1}(Y - X\beta)^T (Y - X\beta), A[K] = X(X^T W X)^{-1} X^T W$$

B. Aplikasi Model Regresi Nonparametrik Spline Truncated Multirespon Pada Kasus Nilai UNAS di SMKN 3 Buduran Sidoarjo

1. Deskripsi Data Penelitian

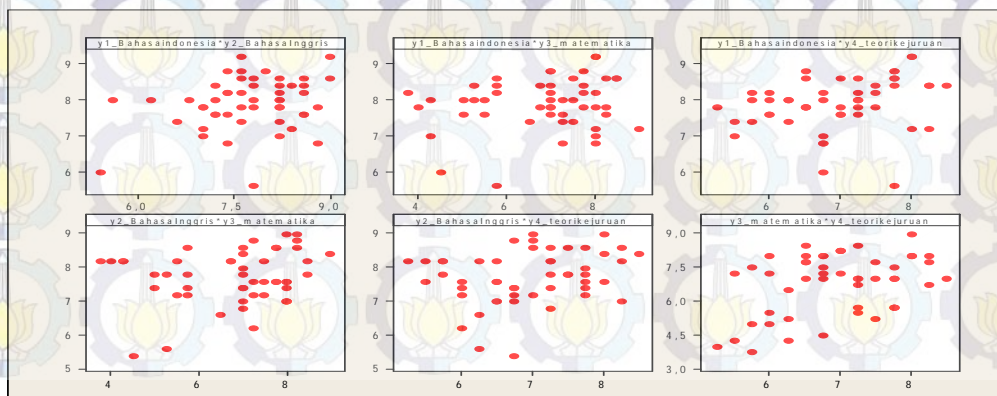
Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder yang diambil dari SMKN 3 Buduran Sidoarjo. Data tersebut merupakan laporan UNAS tahun pelajaran 2012/2013, yang terdiri dari nilai UNAS siswa kelas XII Teknik gambar rancang bangun kapal. Nilai UNAS tersebut meliputi nilai Matematika, Bahasa Inggris, Bahasa Indonesia dan Teori Kejuruan. Variabel respon terdiri dari nilai UNAS Bahasa Indonesia, Bahasa Inggris, Matematika dan Teori Kejuruan sedangkan variabel prediktornya adalah nilai rata-rata rapor kelas III dan nilai Ujian Akhir Sekolah.

Sebelum memodelkan nilai UNAS di SMKN 3 Buduran Sidoarjo maka perlu dilihat deskripsi statistik dari data untuk masing-masing variabel seperti tabel berikut ini. Statistik deskriptif yang ditampilkan digunakan dalam program terutama inisialisasi titik knot.

Tabel 1. Statistik Deskriptif Variabel Respon dan Variabel Prediktor

Variabel	Observasi	Minimum	Maksimum	Range	Mean	Variansi
y_1	50	5,60	9,20	3,60	79,404	0,515
y_2	50	5,40	9,00	3,60	7,724	0,625
y_3	50	3,75	9,00	5,25	6,810	1,792
y_4	50	5,25	8,50	3,25	6,940	0,690
x_{11}	50	7,98	8,56	0,58	81,822	0,0148
x_{21}	50	8,54	9,18	0,64	89,080	0,0256
x_{12}	50	7,66	8,66	1,00	80,104	0,0661
x_{22}	50	8,54	9,20	0,60	87,080	0,0297
x_{13}	50	7,52	8,18	0,66	77,518	0,0259
x_{23}	50	8,50	9,50	1,00	85,360	0,0260
x_{14}	50	7,57	8,25	0,68	7,887	0,0239
x_{24}	50	8,50	9,50	1,00	86,730	0,0850

Untuk melihat pola hubungan antara variabel respon yang satu dengan variabel respon yang lain, maka dapat dilihat pada grafik *scatter plot* pada Gambar 1.

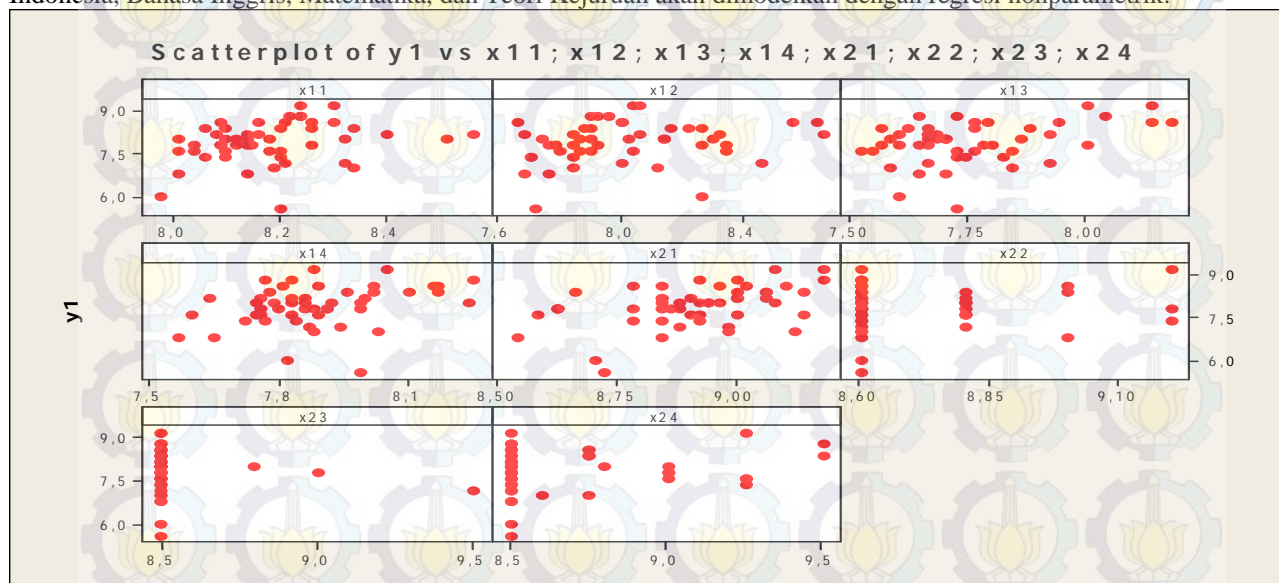


Berikut ini adalah matriks r dengan berisikan nilai koefisien korelasi untuk masing-masing variabel respon.

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 0,273 & 0,195 & 0,273 \\ 0,273 & 1 & 0,194 & 0,243 \\ 0,195 & 0,194 & 1 & 0,383 \\ 0,273 & 0,243 & 0,383 & 1 \end{pmatrix}$$

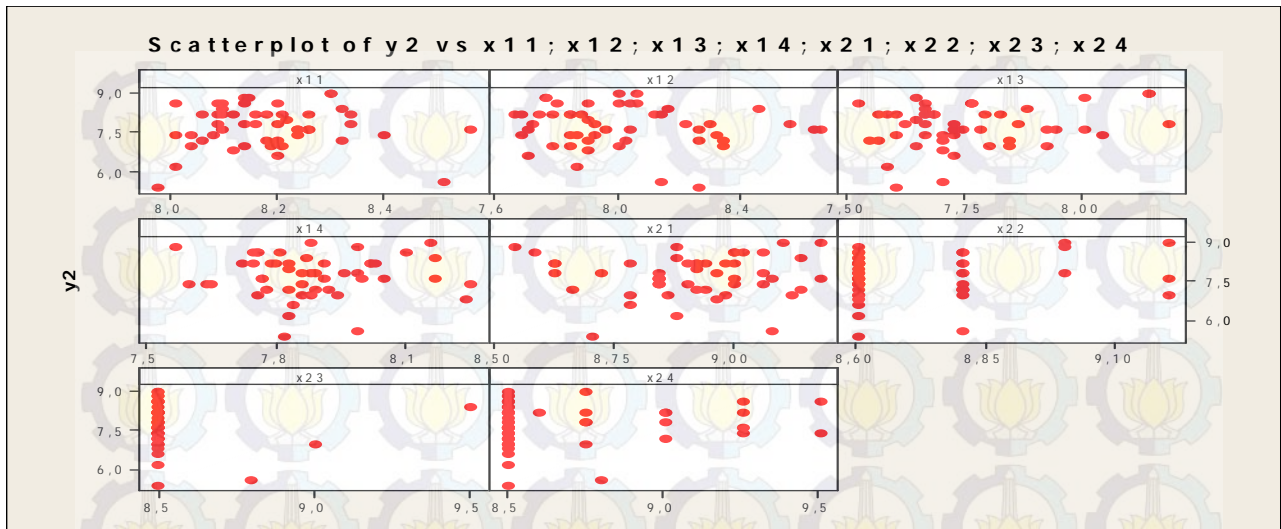
Selanjutnya untuk melihat pola hubungan antara nilai UNAS Bahasa Indonesia dengan nilai rata-rata rapor Bahasa Indonesia, nilai UNAS Bahasa Indonesia dengan nilai Ujian Akhir Sekolah Bahasa Indonesia, nilai UNAS Bahasa Inggris dengan nilai rata-rata rapor Bahasa Inggris, nilai UNAS Bahasa Inggris dengan nilai Ujian Akhir Sekolah Bahasa Inggris, nilai UNAS Matematika dengan nilai rata-rata rapor Matematika, nilai UNAS Matematika dengan nilai Ujian akhir Sekolah Matematika, nilai UNAS Teori Kejuruan dengan nilai rata-rata rapor Teori Kejuruan, nilai UNAS Teori Kejuruan dengan nilai Ujian Akhir Sekolah Teori Kejuruan tampak seperti plot yang disajikan pada gambar-gambar dibawah ini. Oleh karena itu untuk memodelkan pola data tersebut digunakan regresi nonparametrik.

Hubungan antara nilai UNAS Bahasa Indonesia dengan nilai rata-rata rapor dan nilai UAS mata pelajaran Bahasa Indonesia, Bahasa Inggris, Matematika, dan Teori Kejuruan dapat dilihat pada Gambar 2. Berdasarkan gambar tersebut diperoleh kesimpulan bahwa setiap hubungan variabel respon dan prediktor menunjukkan tidak adanya pola tertentu. Pada grafik antara nilai UNAS Bahasa Indonesia dengan nilai rata-rata rapor Bahasa Indonesia dan Bahasa Inggris menunjukkan sebaran yang acak. Sedangkan pada grafik nilai UNAS Bahasa Indonesia terhadap nilai UAS Bahasa Inggris, Matematika dan Teori Kejuruan menunjukkan adanya pengelompokan pada nilai tertentu. Oleh karena itu antara nilai UNAS Bahasa Indonesia dengan dengan Nilai rata-rata rapor dan Nilai UAS Mata Pelajaran Bahasa Indonesia, Bahasa Inggris, Matematika, dan Teori Kejuruan akan dimodelkan dengan regresi nonparametrik.



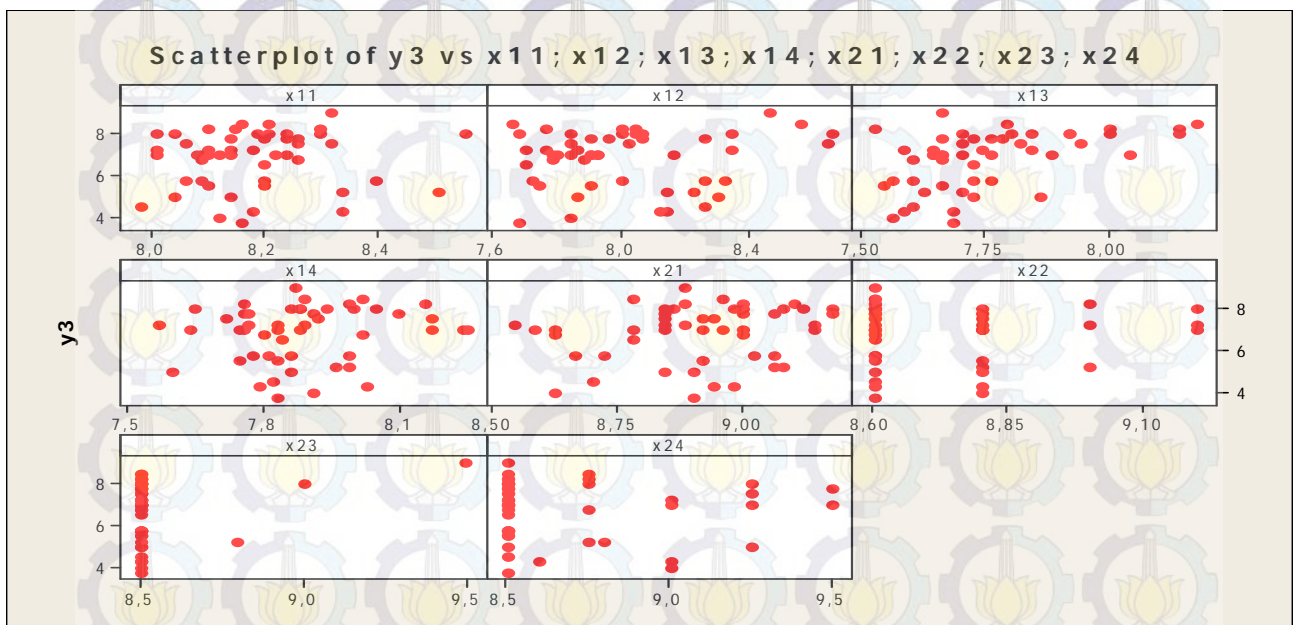
Gambar 2 Plot antara Nilai UNAS Bahasa Indonesia dengan Nilai rata-rata rapor dan Nilai UAS Mata Pelajaran Bahasa Indonesia, Bahasa Inggris, Matematika, dan Teori Kejuruan

Selanjutnya untuk nilai Hubungan antara nilai UNAS Bahasa Inggris dengan nilai rata-rata rapor dan nilai UAS mata pelajaran Bahasa Indonesia, Bahasa Inggris, Matematika, dan Teori Kejuruan dapat dilihat pada Gambar 3. Berdasarkan gambar tersebut diperoleh kesimpulan bahwa setiap hubungan variabel respon dan prediktor menunjukkan tidak adanya pola tertentu. Pada grafik antara nilai UNAS Bahasa Inggris dengan nilai rata-rata rapor Bahasa Indonesia, Bahasa Inggris, Matematika, Teori Kejuruan dan nilai UAS Bahasa Indonesia menunjukkan sebaran yang acak. Sedangkan pada grafik nilai UNAS Bahasa Inggris terhadap nilai UAS Bahasa Inggris, Matematika, dan Teori Kejuruan menunjukkan adanya pengelompokan pada nilai tertentu. Oleh karena itu antara nilai UNAS Bahasa Inggris dengan dengan Nilai rata-rata rapor dan Nilai UAS Mata Pelajaran Bahasa Indonesia, Bahasa Inggris, Matematika, dan Teori Kejuruan akan dimodelkan dengan regresi nonparametrik.



Gambar 3 Plot antara Nilai UNAS Bahasa Inggris dengan Nilai rata-rata rapor dan Nilai UAS Mata Pelajaran Bahasa Inggris, Bahasa Indonesia, Matematika, dan Teori Kejuruan

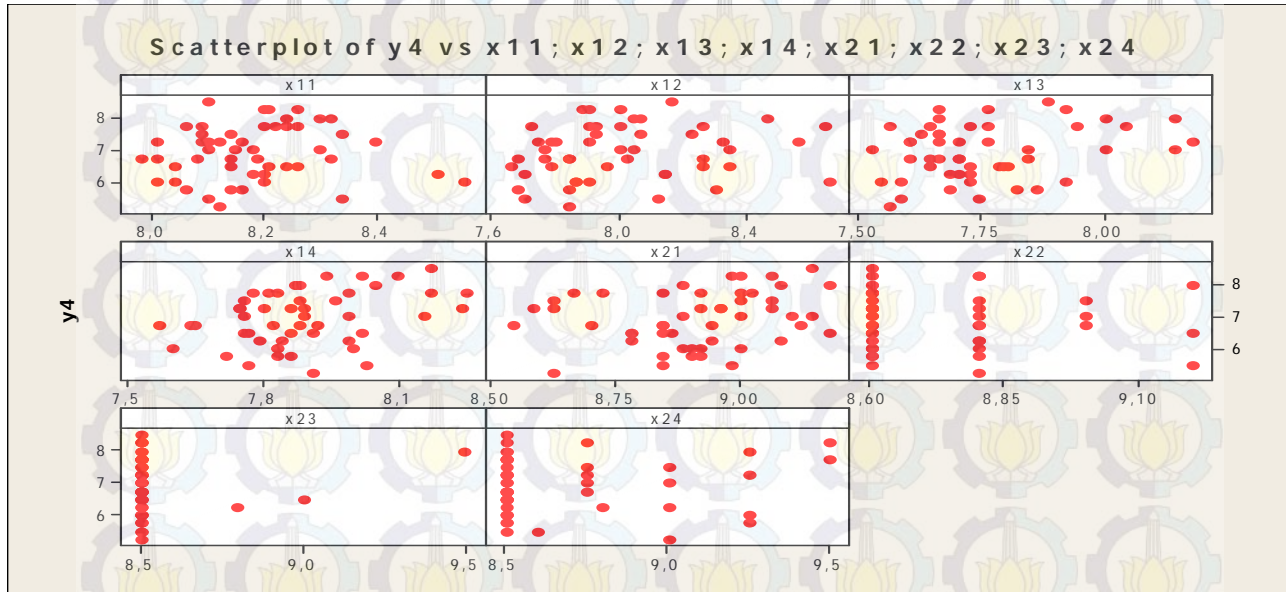
Selanjutnya untuk nilai Hubungan antara nilai UNAS Matematika dengan nilai rata-rata rapor dan nilai UAS mata pelajaran Bahasa Indonesia, Bahasa Inggris, Matematika, dan Teori Kejuruan dapat dilihat pada Gambar 4. Berdasarkan gambar tersebut diperoleh kesimpulan bahwa setiap hubungan variabel respon dan prediktor menunjukkan tidak adanya pola tertentu. Pada grafik antara nilai UNAS Matematika dengan nilai rata-rata rapor Bahasa Indonesia, Bahasa Inggris, Matematika, Teori Kejuruan dan nilai UAS Bahasa Indonesia menunjukkan sebaran yang acak. Sedangkan pada grafik nilai UNAS Matematika terhadap nilai UAS Bahasa Inggris, Bahasa Indonesia, dan Teori Kejuruan menunjukkan adanya pengelompokan pada nilai tertentu. Oleh karena itu antara nilai UNAS Matematika dengan dengan Nilai rata-rata rapor dan Nilai UAS Mata Pelajaran Bahasa Indonesia, Bahasa Inggris, Matematika, dan Teori Kejuruan akan dimodelkan dengan regresi nonparametrik.



Gambar 4 Plot antara Nilai UNAS Matematika dengan Nilai rata-rata rapor dan Nilai UAS Mata Pelajaran Matematika, Bahasa Indonesia Bahasa Inggris, dan Teori Kejuruan

Selanjutnya untuk nilai Hubungan antara nilai UNAS Teori Kejuruan dengan nilai rata-rata rapor dan nilai UAS mata pelajaran Bahasa Indonesia, Bahasa Inggris, Matematika, dan Teori Kejuruan dapat dilihat pada Gambar 5. Berdasarkan gambar tersebut diperoleh kesimpulan bahwa setiap hubungan variabel respon dan prediktor menunjukkan tidak adanya pola tertentu. Pada grafik antara nilai UNAS Teori Kejuruan dengan nilai rata-rata rapor Bahasa Indonesia, Bahasa Inggris, Matematika, Teori Kejuruan dan nilai UAS Bahasa Indonesia menunjukkan sebaran yang acak. Sedangkan pada grafik nilai UNAS Teori Kejuruan terhadap nilai UAS Bahasa Inggris, Bahasa Indonesia, Matematika dan Teori Kejuruan menunjukkan adanya pengelompokan pada nilai tertentu. Oleh karena itu antara nilai UNAS Teori

Kejuruan dengan dengan Nilai rata-rata rapor dan Nilai UAS Mata Pelajaran Bahasa Indonesia, Bahasa Inggris, Matematika, dan Teori Kejuruan akan dimodelkan dengan regresi nonparametrik.



Gambar 5 Plot antara Nilai UNAS Teori Kejuruan dengan Nilai rata-rata rapor dan Nilai UAS Mata Pelajaran Matematika, Bahasa Indonesia Bahasa Inggris, dan Teori Kejuruan

2. Uji Asumsi Multikolinieritas

Uji ini dilakukan untuk mendeteksi apakah antara variabel bebas terjadi korelasi atau tidak.

Tabel 2 Pengujian Multikolinearitas

Prediktor	VIF
x_{11}	1,794
x_{12}	1,461
x_{13}	1,532
x_{14}	1,645
x_{21}	1,497
x_{22}	1,160
x_{23}	1,167
x_{24}	1,108

Berdasarkan Tabel 2 uji asumsi multikolinearitas telah terpenuhi ditunjukkan oleh nilai *Variance Inflation Factors* (VIF). Batasan VIF= 4, menandai adanya kemungkinan permasalahan multikolinearitas. Pada VIF = 10 atau lebih, multikolinearitas dinyatakan sangat parah dan membahayakan (*harmful*) [16].

Model Regresi Nonparametrik Multirespon *Spline Truncated* Linier dengan satu Knot

Pada bagian ini dibahas pemilihan titik knot optimal pada regresi spline linier satu titik knot pada nilai UNAS di SMKN 3 Buduran Sidoarjo dengan dua variabel prediktor dan empat variabel respon. Berikut ini adalah model regresi nonparametrik multirespon *spline truncated* dengan satu titik knot pada nilai UNAS.

$$\begin{aligned}
 \bar{Y}_1 &= \alpha_0 + \alpha_{11}x_{11} + \beta_{111}(x_{11} - K_{11})_+^1 + \alpha_{21}x_{21} + \beta_{211}(x_{21} - K_{21})_+^1 + \alpha_{31}x_{12} + \beta_{311}(x_{12} - K_{31})_+^1 \\
 &\quad + \alpha_{41}x_{22} + \beta_{411}(x_{22} - K_{41})_+^1 + \alpha_{51}x_{13} + \beta_{511}(x_{13} - K_{51})_+^1 + \alpha_{61}x_{23} + \beta_{611}(x_{23} - K_{61})_+^1 \\
 &\quad + \alpha_{71}x_{14} + \beta_{711}(x_{14} - K_{71})_+^1 + \alpha_{81}x_{24} + \beta_{811}(x_{24} - K_{81})_+^1 \\
 \bar{Y}_2 &= \alpha_0 + \alpha_{12}x_{11} + \beta_{121}(x_{11} - K_{11})_+^1 + \alpha_{22}x_{21} + \beta_{221}(x_{21} - K_{21})_+^1 + \alpha_{32}x_{12} + \beta_{321}(x_{12} - K_{31})_+^1 \\
 &\quad + \alpha_{42}x_{22} + \beta_{421}(x_{22} - K_{41})_+^1 + \alpha_{52}x_{13} + \beta_{521}(x_{13} - K_{51})_+^1 + \alpha_{62}x_{23} + \beta_{621}(x_{23} - K_{61})_+^1 \\
 &\quad + \alpha_{72}x_{14} + \beta_{721}(x_{14} - K_{71})_+^1 + \alpha_{82}x_{24} + \beta_{821}(x_{24} - K_{81})_+^1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{Y}_3 &= \alpha_0 + \alpha_{13}x_{11} + \beta_{131}(x_{11} - K_{11})_+^1 + \alpha_{23}x_{21} + \beta_{231}(x_{21} - K_{21})_+^1 + \alpha_{33}x_{12} + \beta_{331}(x_{12} - K_{31})_+^1 \\ &+ \alpha_{43}x_{22} + \beta_{431}(x_{22} - K_{41})_+^1 + \alpha_{53}x_{13} + \beta_{531}(x_{13} - K_{51})_+^1 + \alpha_{63}x_{23} + \beta_{631}(x_{23} - K_{61})_+^1 \\ &+ \alpha_{73}x_{14} + \beta_{731}(x_{14} - K_{71})_+^1 + \alpha_{83}x_{24} + \beta_{831}(x_{24} - K_{81})_+^1 \\ \hat{Y}_4 &= \alpha_0 + \alpha_{14}x_{11} + \beta_{141}(x_{11} - K_{11})_+^1 + \alpha_{24}x_{21} + \beta_{241}(x_{21} - K_{21})_+^1 + \alpha_{34}x_{12} + \beta_{341}(x_{12} - K_{31})_+^1 \\ &+ \alpha_{44}x_{22} + \beta_{441}(x_{22} - K_{41})_+^1 + \alpha_{54}x_{13} + \beta_{541}(x_{13} - K_{51})_+^1 + \alpha_{64}x_{23} + \beta_{641}(x_{23} - K_{61})_+^1 \\ &+ \alpha_{74}x_{14} + \beta_{741}(x_{14} - K_{71})_+^1 + \alpha_{84}x_{24} + \beta_{841}(x_{24} - K_{81})_+^1\end{aligned}$$

Model regresi nonparametrik multirespon spline *truncated* linier yang terbaik diperoleh dari titik-titik knot yang optimum. Titik knot optimum diperoleh dari nilai GCV yang paling kecil. Berikut adalah hasil analisis perhitungan GCV pada regresi nonparametrik dengan satu knot.

Tabel 3 Nilai GCV untuk Spline Linier 1 Knot

Nilai GCV untuk masing-masing variabel									GCV
	X11	X12	X13	X14	X21	X22	X23	X24	
Y1	8,09	7,84	7,64	7,69	8,66	8,71	8,68	8,68	1,001116
Y2	8,09	7,84	7,64	7,69	8,66	8,71	8,68	8,68	
Y3	8,09	7,84	7,64	7,69	8,66	8,71	8,68	8,68	
Y4	8,09	7,84	7,64	7,69	8,66	8,71	8,68	8,68	
Y1	8,35	8,3	7,94	8	8,95	8,98	9,14	9,14	0,988749
Y2	8,35	8,3	7,94	8	8,95	8,98	9,14	9,14	
Y3	8,35	8,3	7,94	8	8,95	8,98	9,14	9,14	
Y4	8,35	8,3	7,94	8	8,95	8,98	9,14	9,14	
Y1	8,4	8,39	8	8,06	9,01	9,04	9,23	9,23	0,992439
Y2	8,4	8,39	8	8,06	9,01	9,04	9,23	9,23	
Y3	8,4	8,39	8	8,06	9,01	9,04	9,23	9,23	
Y4	8,4	8,39	8	8,06	9,01	9,04	9,23	9,23	
Y1	8,3	8,21	7,88	7,94	8,89	8,93	9,05	9,05	0,982191
Y2	8,3	8,21	7,88	7,94	8,89	8,93	9,05	9,05	
Y3	8,3	8,21	7,88	7,94	8,89	8,93	9,05	9,05	
Y4	8,3	8,21	7,88	7,94	8,89	8,93	9,05	9,05	
Y1	8,24	8,11	7,82	7,88	8,83	8,87	8,95	8,95	1,015084
Y2	8,24	8,11	7,82	7,88	8,83	8,87	8,95	8,95	
Y3	8,24	8,11	7,82	7,88	8,83	8,87	8,95	8,95	
Y4	8,24	8,11	7,82	7,88	8,83	8,87	8,95	8,95	
Y1	8,45	8,48	8,06	8,13	9,06	9,09	9,32	9,32	1,04869
Y2	8,45	8,48	8,06	8,13	9,06	9,09	9,32	9,32	
Y3	8,45	8,48	8,06	8,13	9,06	9,09	9,32	9,32	
Y4	8,45	8,48	8,06	8,13	9,06	9,09	9,32	9,32	
Y1	8,14	7,93	7,7	7,76	8,71	8,76	8,77	8,77	1,051136
Y2	8,14	7,93	7,7	7,76	8,71	8,76	8,77	8,77	
Y3	8,14	7,93	7,7	7,76	8,71	8,76	8,77	8,77	
Y4	8,14	7,93	7,7	7,76	8,71	8,76	8,77	8,77	
Y1	8,19	8,02	7,76	7,82	8,77	8,82	8,86	8,86	1,062644
Y2	8,19	8,02	7,76	7,82	8,77	8,82	8,86	8,86	
Y3	8,19	8,02	7,76	7,82	8,77	8,82	8,86	8,86	

Y4	8,19	8,02	7,76	7,82	8,77	8,82	8,86	8,86	
Y1	8,03	7,75	7,58	7,63	8,6	8,65	8,59	8,59	1,063123
Y2	8,03	7,75	7,58	7,63	8,6	8,65	8,59	8,59	
Y3	8,03	7,75	7,58	7,63	8,6	8,65	8,59	8,59	
Y4	8,03	7,75	7,58	7,63	8,6	8,65	8,59	8,59	
Y1	8,51	8,57	8,12	8,19	9,12	9,15	9,41	9,41	1,079841
Y2	8,51	8,57	8,12	8,19	9,12	9,15	9,41	9,41	
Y3	8,51	8,57	8,12	8,19	9,12	9,15	9,41	9,41	
Y4	8,51	8,57	8,12	8,19	9,12	9,15	9,41	9,41	

Berdasarkan Tabel 3 terlihat bahwa nilai GCV paling kecil adalah sebesar 0,982191 dengan titik knot optimal adalah sebagai berikut.

$$\bar{Y}_1 (x_{11} : K_{11} = 8,3; x_{21} : K_{21} = 8,21; x_{21} : K_{31} = 7,88; x_{22} : K_{41} = 7,94; x_{13} : K_{51} = 8,89) \\ (x_{23} : K_{61} = 8,93; x_{14} : K_{71} = 9,05; x_{24} : K_{81} = 9,05)$$

$$\bar{Y}_2 (x_{11} : K_{11} = 8,3; x_{21} : K_{21} = 8,21; x_{21} : K_{31} = 7,88; x_{22} : K_{41} = 7,94; x_{13} : K_{51} = 8,89) \\ (x_{23} : K_{61} = 8,93; x_{14} : K_{71} = 9,05; x_{24} : K_{81} = 9,05)$$

$$\bar{Y}_3 (x_{11} : K_{11} = 8,3; x_{21} : K_{21} = 8,21; x_{21} : K_{31} = 7,88; x_{22} : K_{41} = 7,94; x_{13} : K_{51} = 8,89) \\ (x_{23} : K_{61} = 8,93; x_{14} : K_{71} = 9,05; x_{24} : K_{81} = 9,05)$$

$$\bar{Y}_4 (x_{11} : K_{11} = 8,3; x_{21} : K_{21} = 8,21; x_{21} : K_{31} = 7,88; x_{22} : K_{41} = 7,94; x_{13} : K_{51} = 8,89) \\ (x_{23} : K_{61} = 8,93; x_{14} : K_{71} = 9,05; x_{24} : K_{81} = 9,05)$$

Model Regresi Nonparametrik Multirespon Spline *Truncated* Linier dengan dua Knot

Setelah diperoleh GCV minimum pada spline linier satu titik knot kemudian dilanjutkan menjadi dua titik knot pada setiap variabel. Berikut ini adalah model regresi nonparametrik spline *truncated* linier dengan dua titik knot pada nilai UNAS.

$$\bar{Y}_1 = \alpha_0 + \alpha_{11}x_{11} + \beta_{111}(x_{11} - K_{11})_+^1 + \beta_{112}(x_{11} - K_{12})_+^1 + \alpha_{21}x_{21} + \beta_{211}(x_{21} - K_{21})_+^1 \\ + \beta_{212}(x_{21} - K_{22})_+^1 + \alpha_{31}x_{12} + \beta_{311}(x_{12} - K_{31})_+^1 + \beta_{312}(x_{31} - K_{32})_+^1 \\ + \alpha_{41}x_{22} + \beta_{411}(x_{22} - K_{41})_+^1 + \beta_{412}(x_{41} - K_{42})_+^1 + \alpha_{51}x_{13} + \beta_{511}(x_{13} - K_{51})_+^1 \\ + \beta_{512}(x_{51} - K_{52})_+^1 + \alpha_{61}x_{23} + \beta_{611}(x_{23} - K_{61})_+^1 + \beta_{612}(x_{61} - K_{62})_+^1 \\ + \alpha_{71}x_{14} + \beta_{711}(x_{14} - K_{71})_+^1 + \beta_{712}(x_{71} - K_{72})_+^1 + \alpha_{81}x_{24} + \beta_{811}(x_{14} - K_{81})_+^1 \\ + \beta_{812}(x_{24} - K_{82})_+^1$$

$$\bar{Y}_2 = \alpha_0 + \alpha_{12}x_{11} + \beta_{121}(x_{11} - K_{11})_+^1 + \beta_{122}(x_{11} - K_{12})_+^1 + \alpha_{22}x_{21} + \beta_{221}(x_{21} - K_{21})_+^1 \\ + \beta_{222}(x_{21} - K_{22})_+^1 + \alpha_{32}x_{12} + \beta_{321}(x_{12} - K_{31})_+^1 + \beta_{322}(x_{31} - K_{32})_+^1 \\ + \alpha_{42}x_{22} + \beta_{421}(x_{22} - K_{41})_+^1 + \beta_{422}(x_{41} - K_{42})_+^1 + \alpha_{52}x_{13} + \beta_{521}(x_{13} - K_{51})_+^1 \\ + \beta_{522}(x_{51} - K_{52})_+^1 + \alpha_{62}x_{23} + \beta_{621}(x_{23} - K_{61})_+^1 + \beta_{622}(x_{61} - K_{62})_+^1 \\ + \alpha_{72}x_{14} + \beta_{721}(x_{14} - K_{71})_+^1 + \beta_{722}(x_{71} - K_{72})_+^1 + \alpha_{82}x_{24} + \beta_{821}(x_{14} - K_{81})_+^1 \\ + \beta_{822}(x_{24} - K_{82})_+^1$$

$$\begin{aligned} \hat{Y}_3 = & \alpha_0 + \alpha_{13}x_{11} + \beta_{131}(x_{11} - K_{11})_+^1 + \beta_{132}(x_{11} - K_{12})_+^1 + \alpha_{23}x_{21} + \beta_{231}(x_{21} - K_{21})_+^1 \\ & + \beta_{232}(x_{21} - K_{22})_+^1 + \alpha_{33}x_{12} + \beta_{331}(x_{12} - K_{31})_+^1 + \beta_{332}(x_{31} - K_{32})_+^1 \\ & + \alpha_{43}x_{22} + \beta_{431}(x_{22} - K_{41})_+^1 + \beta_{432}(x_{41} - K_{42})_+^1 + \alpha_{53}x_{13} + \beta_{531}(x_{13} - K_{51})_+^1 \\ & + \beta_{532}(x_{51} - K_{52})_+^1 + \alpha_{63}x_{23} + \beta_{631}(x_{23} - K_{61})_+^1 + \beta_{632}(x_{61} - K_{62})_+^1 \\ & + \alpha_{73}x_{14} + \beta_{731}(x_{14} - K_{71})_+^1 + \beta_{732}(x_{71} - K_{72})_+^1 + \alpha_{83}x_{24} + \beta_{831}(x_{14} - K_{81})_+^1 \\ & + \beta_{832}(x_{24} - K_{82})_+^1 \\ \hat{Y}_4 = & \alpha_0 + \alpha_{14}x_{11} + \beta_{141}(x_{11} - K_{11})_+^1 + \beta_{142}(x_{11} - K_{12})_+^1 + \alpha_{24}x_{21} + \beta_{241}(x_{21} - K_{21})_+^1 \\ & + \beta_{242}(x_{21} - K_{22})_+^1 + \alpha_{34}x_{12} + \beta_{341}(x_{12} - K_{31})_+^1 + \beta_{342}(x_{31} - K_{32})_+^1 \\ & + \alpha_{44}x_{22} + \beta_{441}(x_{22} - K_{41})_+^1 + \beta_{442}(x_{41} - K_{42})_+^1 + \alpha_{54}x_{13} + \beta_{541}(x_{13} - K_{51})_+^1 \\ & + \beta_{542}(x_{51} - K_{52})_+^1 + \alpha_{64}x_{23} + \beta_{641}(x_{23} - K_{61})_+^1 + \beta_{642}(x_{61} - K_{62})_+^1 \\ & + \alpha_{74}x_{14} + \beta_{741}(x_{14} - K_{71})_+^1 + \beta_{742}(x_{71} - K_{72})_+^1 + \alpha_{84}x_{24} + \beta_{841}(x_{14} - K_{81})_+^1 \\ & + \beta_{842}(x_{24} - K_{82})_+^1 \end{aligned}$$

Hasil dari perhitungan dua titik knot dapat dilihat pada Tabel 4 sebagai berikut.

Tabel 4 Nilai GCV untuk Spline Linier 2 Knot								
Titik Knot untuk masing-masing variabel								GCV
	X11	X12	X13	X14	X21	X22	X23	X24
Y1	8,033	8,3	7,75	8,205	7,58	7,88	7,63	7,94
	8,598	8,89	8,65	8,927	8,59	9,05	8,59	9,05
Y2	8,033	8,3	7,75	8,205	7,58	7,88	7,63	7,94
	8,598	8,89	8,65	8,927	8,59	9,05	8,59	9,05
Y3	8,033	8,35	7,75	8,296	7,58	7,94	7,63	8
	8,598	8,95	8,65	8,982	8,59	9,14	8,59	9,14
Y4	8,033	8,3	7,75	8,205	7,58	7,88	7,63	7,94
	8,598	8,89	8,65	8,927	8,59	9,05	8,59	9,05
Y1	8,033	8,14	7,75	7,933	7,58	7,7	7,63	7,76
	8,598	8,71	8,65	8,764	8,59	8,77	8,59	8,77
Y2	8,033	8,14	7,75	7,933	7,58	7,7	7,63	7,76
	8,598	8,71	8,65	8,764	8,59	8,77	8,59	8,77
Y3	8,033	8,14	7,75	7,933	7,58	7,7	7,63	7,76
	8,598	8,71	8,65	8,764	8,59	8,77	8,59	8,77
Y4	8,033	8,14	7,75	7,933	7,58	7,7	7,63	7,76
	8,598	8,71	8,65	8,764	8,59	8,77	8,59	8,77
Y1	8,033	8,19	7,75	8,024	7,58	7,76	7,63	7,82
	8,598	8,77	8,65	8,818	8,59	8,86	8,59	8,86
Y2	8,033	8,19	7,75	8,024	7,58	7,76	7,63	7,82
	8,598	8,77	8,65	8,818	8,59	8,86	8,59	8,86
Y3	8,033	8,19	7,75	8,024	7,58	7,76	7,63	7,82
	8,598	8,77	8,65	8,818	8,59	8,86	8,59	8,86
Y4	8,033	8,19	7,75	8,024	7,58	7,76	7,63	7,82
	8,598	8,77	8,65	8,818	8,59	8,86	8,59	8,86
Y1	8,085	8,14	7,84	7,933	7,64	7,7	7,69	7,76

	8,656	8,71	8,71	8,764	8,68	8,77	8,68	8,77	
Y2	8,085	8,14	7,84	7,933	7,64	7,7	7,69	7,76	
	8,656	8,71	8,71	8,764	8,68	8,77	8,68	8,77	
Y3	8,085	8,14	7,84	7,933	7,64	7,7	7,69	7,76	
	8,656	8,71	8,71	8,764	8,68	8,77	8,68	8,77	
Y4	8,085	8,14	7,84	7,933	7,64	7,7	7,69	7,76	
	8,656	8,71	8,71	8,764	8,68	8,77	8,68	8,77	
Y1	8,033	8,24	7,75	8,115	7,58	7,82	7,63	7,88	1,585062
	8,598	8,83	8,65	8,873	8,59	8,95	8,59	8,95	
Y2	8,033	8,24	7,75	8,115	7,58	7,82	7,63	7,88	
	8,598	8,89	8,65	8,927	8,59	9,05	8,59	9,05	
Y3	8,033	8,24	7,75	8,115	7,58	7,82	7,63	7,88	
	8,598	8,83	8,65	8,873	8,59	8,95	8,59	8,95	
Y4	8,033	8,24	7,75	8,115	7,58	7,82	7,63	7,88	
	8,598	8,83	8,65	8,873	8,59	8,95	8,59	8,95	
Y1	8,03	8,09	7,75	7,84	7,58	7,64	7,6	7,69	1,32005
	8,6	8,66	8,65	8,71	8,59	8,68	8,6	8,68	
Y2	8,03	8,09	7,75	7,84	7,58	7,64	7,6	7,69	
	8,6	8,66	8,65	8,71	8,59	8,68	8,6	8,68	
Y3	8,03	8,09	7,75	7,84	7,58	7,64	7,6	7,69	
	8,6	8,66	8,65	8,71	8,59	8,68	8,6	8,68	
Y4	8,03	8,09	7,75	7,84	7,58	7,64	7,6	7,69	
	8,6	8,66	8,65	8,71	8,59	8,68	8,6	8,68	
Y1	8,033	8,35	7,75	8,296	7,58	7,94	7,63	8	1,629434
	8,598	8,95	8,65	8,982	8,59	9,14	8,59	9,14	
Y2	8,033	8,35	7,75	8,296	7,58	7,94	7,63	8	
	8,598	8,95	8,65	8,982	8,59	9,14	8,59	9,14	
Y3	8,033	8,4	7,75	8,387	7,58	8	7,63	8,06	
	8,598	9,01	8,65	9,036	8,59	9,23	8,59	9,23	
Y4	8,033	8,35	7,75	8,296	7,58	7,94	7,63	8	
	8,598	8,95	8,65	8,982	8,59	9,14	8,59	9,14	
Y1	8,033	8,4	7,75	8,387	7,58	8	7,63	8,06	1,65733
	8,598	9,01	8,65	9,036	8,59	9,23	8,59	9,23	
Y2	8,033	8,4	7,75	8,387	7,58	8	7,63	8,06	
	8,598	9,01	8,65	9,036	8,59	9,23	8,59	9,23	
Y3	8,033	8,45	7,75	8,478	7,58	8,06	7,63	8,13	

Berdasarkan Tabel 4 terlihat bahwa nilai GCV paling kecil adalah sebesar 1,32005 dengan titik knot optimal adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 \hat{Y}_1 (x_{11} : K_{11} = 8,03; x_{11} : K_{12} = 8,6; x_{21} : K_{21} = 8,09; x_{21} : K_{22} = 8,66 \\
 x_{12} : K_{31} = 7,75; x_{12} : K_{32} = 8,65; x_{22} : K_{41} = 7,84; x_{22} : K_{42} = 8,71 \\
 x_{13} : K_{51} = 7,58; x_{13} : K_{52} = 8,59; x_{23} : K_{61} = 7,64; x_{23} : K_{62} = 8,68 \\
 x_{14} : K_{71} = 7,6; x_{14} : K_{72} = 8,6; x_{24} : K_{81} = 7,69; x_{24} : K_{82} = 8,68 \\
 \hat{Y}_2 (x_{11} : K_{11} = 8,03; x_{11} : K_{12} = 8,6; x_{21} : K_{21} = 8,09; x_{21} : K_{22} = 8,66 \\
 x_{12} : K_{31} = 7,75; x_{12} : K_{32} = 8,65; x_{22} : K_{41} = 7,84; x_{22} : K_{42} = 8,71 \\
 x_{13} : K_{51} = 7,58; x_{13} : K_{52} = 8,59; x_{23} : K_{61} = 7,64; x_{23} : K_{62} = 8,68 \\
 x_{14} : K_{71} = 7,6; x_{14} : K_{72} = 8,6; x_{24} : K_{81} = 7,69; x_{24} : K_{82} = 8,68
 \end{aligned}$$

$$Y_3 : (x_{11} : K_{11} = 8,03; x_{11} : K_{12} = 8,6; x_{21} : K_{21} = 8,09; x_{21} : K_{22} = 8,66$$

$$x_{12} : K_{31} = 7,75; x_{12} : K_{32} = 8,65; x_{22} : K_{41} = 7,84; x_{22} : K_{42} = 8,71$$

$$x_{13} : K_{51} = 7,58; x_{13} : K_{52} = 8,59; x_{23} : K_{61} = 7,64; x_{23} : K_{62} = 8,68$$

$$x_{14} : K_{71} = 7,6; x_{14} : K_{72} = 8,6; x_{24} : K_{81} = 7,69; x_{24} : K_{82} = 8,68$$

$$Y_4 : (x_{11} : K_{11} = 8,03; x_{11} : K_{12} = 8,6; x_{21} : K_{21} = 8,09; x_{21} : K_{22} = 8,66$$

$$x_{12} : K_{31} = 7,75; x_{12} : K_{32} = 8,65; x_{22} : K_{41} = 7,84; x_{22} : K_{42} = 8,71$$

$$x_{13} : K_{51} = 7,58; x_{13} : K_{52} = 8,59; x_{23} : K_{61} = 7,64; x_{23} : K_{62} = 8,68$$

$$x_{14} : K_{71} = 7,6; x_{14} : K_{72} = 8,6; x_{24} : K_{81} = 7,69; x_{24} : K_{82} = 8,68$$

Model Regresi Nonparametrik Multirespon Spline *Truncated* Linier dengan tiga Knot

Setelah diperoleh dua titik knot, kemudian dilanjutkan dengan tiga titik knot dengan model regresi nonparametrik multirespon spline *truncated* linier tiga knot.

$$\begin{aligned} Y_1 = & \alpha_0 + \alpha_{11}x_{11} + \beta_{111}(x_{11} - K_{11})_+^1 + \beta_{112}(x_{11} - K_{12})_+^1 + \beta_{113}(x_{11} - K_{13})_+^1 \\ & + \alpha_{21}x_{21} + \beta_{211}(x_{21} - K_{21})_+^1 + \beta_{212}(x_{21} - K_{22})_+^1 + \beta_{213}(x_{21} - K_{23})_+^1 \\ & + \alpha_{31}x_{31} + \beta_{311}(x_{12} - K_{31})_+^1 + \beta_{312}(x_{12} - K_{32})_+^1 + \beta_{313}(x_{12} - K_{33})_+^1 \\ & + \alpha_{41}x_{41} + \beta_{411}(x_{22} - K_{41})_+^1 + \beta_{412}(x_{22} - K_{42})_+^1 + \beta_{413}(x_{22} - K_{43})_+^1 \\ & + \alpha_{51}x_{51} + \beta_{511}(x_{13} - K_{51})_+^1 + \beta_{512}(x_{13} - K_{52})_+^1 + \beta_{513}(x_{13} - K_{53})_+^1 \\ & + \alpha_{61}x_{61} + \beta_{611}(x_{23} - K_{61})_+^1 + \beta_{612}(x_{23} - K_{62})_+^1 + \beta_{613}(x_{23} - K_{63})_+^1 \\ & + \alpha_{71}x_{71} + \beta_{711}(x_{14} - K_{71})_+^1 + \beta_{712}(x_{14} - K_{72})_+^1 + \beta_{713}(x_{14} - K_{73})_+^1 \\ & + \alpha_{81}x_{81} + \beta_{811}(x_{24} - K_{81})_+^1 + \beta_{812}(x_{24} - K_{82})_+^1 + \beta_{813}(x_{24} - K_{83})_+^1 \\ Y_2 = & \alpha_0 + \alpha_{12}x_{11} + \beta_{121}(x_{11} - K_{11})_+^1 + \beta_{122}(x_{11} - K_{12})_+^1 + \beta_{123}(x_{11} - K_{13})_+^1 \\ & + \alpha_{22}x_{21} + \beta_{221}(x_{21} - K_{21})_+^1 + \beta_{222}(x_{21} - K_{22})_+^1 + \beta_{223}(x_{21} - K_{23})_+^1 \\ & + \alpha_{32}x_{31} + \beta_{321}(x_{12} - K_{31})_+^1 + \beta_{322}(x_{12} - K_{32})_+^1 + \beta_{323}(x_{12} - K_{33})_+^1 \\ & + \alpha_{42}x_{41} + \beta_{421}(x_{22} - K_{41})_+^1 + \beta_{422}(x_{22} - K_{42})_+^1 + \beta_{423}(x_{22} - K_{43})_+^1 \\ & + \alpha_{52}x_{51} + \beta_{521}(x_{13} - K_{51})_+^1 + \beta_{522}(x_{13} - K_{52})_+^1 + \beta_{523}(x_{13} - K_{53})_+^1 \\ & + \alpha_{62}x_{61} + \beta_{621}(x_{23} - K_{61})_+^1 + \beta_{622}(x_{23} - K_{62})_+^1 + \beta_{623}(x_{23} - K_{63})_+^1 \\ & + \alpha_{72}x_{71} + \beta_{721}(x_{14} - K_{71})_+^1 + \beta_{722}(x_{14} - K_{72})_+^1 + \beta_{723}(x_{14} - K_{73})_+^1 \\ & + \alpha_{82}x_{81} + \beta_{821}(x_{24} - K_{81})_+^1 + \beta_{822}(x_{24} - K_{82})_+^1 + \beta_{823}(x_{24} - K_{83})_+^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_3 = & \alpha_0 + \alpha_{13}x_{11} + \beta_{131}(x_{11} - K_{11})_+^1 + \beta_{132}(x_{11} - K_{12})_+^1 + \beta_{133}(x_{11} - K_{13})_+^1 \\ & + \alpha_{23}x_{21} + \beta_{231}(x_{21} - K_{21})_+^1 + \beta_{232}(x_{21} - K_{22})_+^1 + \beta_{233}(x_{21} - K_{23})_+^1 \\ & + \alpha_{33}x_{31} + \beta_{331}(x_{12} - K_{31})_+^1 + \beta_{332}(x_{12} - K_{32})_+^1 + \beta_{333}(x_{12} - K_{33})_+^1 \\ & + \alpha_{43}x_{41} + \beta_{431}(x_{22} - K_{41})_+^1 + \beta_{432}(x_{22} - K_{42})_+^1 + \beta_{433}(x_{22} - K_{43})_+^1 \\ & + \alpha_{53}x_{51} + \beta_{531}(x_{13} - K_{51})_+^1 + \beta_{532}(x_{13} - K_{52})_+^1 + \beta_{533}(x_{13} - K_{53})_+^1 \\ & + \alpha_{63}x_{61} + \beta_{631}(x_{23} - K_{61})_+^1 + \beta_{632}(x_{23} - K_{62})_+^1 + \beta_{633}(x_{23} - K_{63})_+^1 \\ & + \alpha_{73}x_{71} + \beta_{731}(x_{14} - K_{71})_+^1 + \beta_{732}(x_{14} - K_{72})_+^1 + \beta_{733}(x_{14} - K_{73})_+^1 \\ & + \alpha_{83}x_{81} + \beta_{831}(x_{24} - K_{81})_+^1 + \beta_{832}(x_{24} - K_{82})_+^1 + \beta_{833}(x_{24} - K_{83})_+^1 \\ Y_4 = & \alpha_0 + \alpha_{14}x_{11} + \beta_{141}(x_{11} - K_{11})_+^1 + \beta_{142}(x_{11} - K_{12})_+^1 + \beta_{143}(x_{11} - K_{13})_+^1 \\ & + \alpha_{24}x_{21} + \beta_{241}(x_{21} - K_{21})_+^1 + \beta_{242}(x_{21} - K_{22})_+^1 + \beta_{243}(x_{21} - K_{23})_+^1 \\ & + \alpha_{34}x_{31} + \beta_{341}(x_{12} - K_{31})_+^1 + \beta_{342}(x_{12} - K_{32})_+^1 + \beta_{343}(x_{12} - K_{33})_+^1 \\ & + \alpha_{44}x_{41} + \beta_{441}(x_{22} - K_{41})_+^1 + \beta_{442}(x_{22} - K_{42})_+^1 + \beta_{443}(x_{22} - K_{43})_+^1 \\ & + \alpha_{54}x_{51} + \beta_{541}(x_{13} - K_{51})_+^1 + \beta_{542}(x_{13} - K_{52})_+^1 + \beta_{543}(x_{13} - K_{53})_+^1 \\ & + \alpha_{64}x_{61} + \beta_{641}(x_{23} - K_{61})_+^1 + \beta_{642}(x_{23} - K_{62})_+^1 + \beta_{643}(x_{23} - K_{63})_+^1 \\ & + \alpha_{74}x_{71} + \beta_{741}(x_{14} - K_{71})_+^1 + \beta_{742}(x_{14} - K_{72})_+^1 + \beta_{743}(x_{14} - K_{73})_+^1 \\ & + \alpha_{84}x_{81} + \beta_{841}(x_{24} - K_{81})_+^1 + \beta_{842}(x_{24} - K_{82})_+^1 + \beta_{843}(x_{24} - K_{83})_+^1 \end{aligned}$$

Hasil dari perhitungan tiga titik knot dapat dilihat pada Tabel 5 sebagai berikut.

Tabel 5 Nilai GCV untuk Spline Linier 3 Knot

Nilai GCV untuk masing-masing Knot									GCV
	X11	X12	X13	X14	X21	X22	X23	X24	
Y1	8,14	8,19	8,24	7,93	8,02	8,11	7,70	7,76	1,517.492
	7,82	7,75	7,81	7,87	8,71	8,77	8,83	8,76	
	8,81	8,72	8,77	8,86	8,94	8,77	8,86	8,95	
Y2	8,14	8,19	8,24	7,93	8,02	8,11	7,70	7,76	
	7,82	7,75	7,81	7,87	8,71	8,77	7,70	7,76	
	8,81	8,72	8,77	8,86	8,94	8,77	8,83	8,76	
Y3	8,14	8,19	8,24	7,93	8,02	8,11	8,86	8,95	
	7,82	7,75	7,81	7,87	8,71	8,77	7,70	7,76	
	8,81	8,72	8,77	8,86	8,94	8,77	7,70	7,76	
Y4	8,14	8,19	8,24	7,93	8,02	8,11	8,83	8,76	
	7,82	7,75	7,81	7,87	8,71	8,77	8,86	8,95	
	8,81	8,72	8,77	8,86	8,94	8,77	7,70	7,76	
Y1	8,14	8,19	8,24	7,93	8,02	8,11	7,70	7,76	1,334.226
	7,82	7,75	7,81	7,87	8,71	8,77	8,83	8,76	
	8,81	8,72	8,77	8,86	8,94	8,77	8,86	8,95	
Y2	8,14	8,19	8,24	7,93	8,02	8,11	7,70	7,76	
	7,82	7,75	7,81	7,87	8,71	8,77	7,70	7,76	
	8,81	8,72	8,77	8,86	8,94	8,77	8,83	8,76	
Y3	8,14	8,19	8,24	7,93	8,02	8,11	8,86	8,95	
	7,82	7,75	7,81	7,87	8,71	8,77	7,70	7,76	
	8,81	8,72	8,77	8,86	8,94	8,77	7,70	7,76	
Y4	8,14	8,19	8,24	7,93	8,02	8,11	8,83	8,76	
	7,82	7,75	7,81	7,87	8,71	8,77	8,86	8,95	
	8,81	8,72	8,77	8,86	8,94	8,77	7,70	7,76	
Y1	8,14	8,19	8,24	7,93	8,02	8,11	7,70	7,76	1,431.426
	7,82	7,75	7,81	7,87	8,71	8,77	8,83	8,76	
	8,81	8,72	8,77	8,86	8,94	8,77	8,86	8,95	
Y2	8,14	8,19	8,24	7,93	8,02	8,11	7,70	7,76	
	7,82	7,75	7,81	7,87	8,71	8,77	7,70	7,76	
	8,81	8,72	8,77	8,86	8,94	8,77	8,83	8,76	
Y3	8,14	8,19	8,24	7,93	8,02	8,11	8,86	8,95	
	7,82	7,75	7,81	7,87	8,71	8,77	7,70	7,76	
	8,81	8,72	8,77	8,86	8,94	8,77	7,70	7,76	
Y4	8,14	8,19	8,24	7,93	8,02	8,11	8,83	8,76	
	7,82	7,75	7,81	7,87	8,71	8,77	8,86	8,95	
	8,81	8,72	8,77	8,86	8,94	8,77	7,70	7,76	
Y1	8,14	8,19	8,24	7,93	8,02	8,11	7,70	7,76	1,454.345
	7,82	7,75	7,81	7,87	8,71	8,77	8,83	8,76	
	8,81	8,72	8,77	8,86	8,94	8,77	8,86	8,95	
Y2	8,14	8,19	8,24	7,93	8,02	8,11	7,70	7,76	
	7,82	7,75	7,81	7,87	8,71	8,77	8,86	8,95	
	8,81	8,72	8,77	8,86	8,94	8,77	7,70	7,76	

	7.82	7.75	7.81	7.87	8.71	8.77	7.70	7.76	
	8.81	8.72	8.77	8.86	8.94	8.77	8.83	8.76	
Y3	8.14	8.19	8.24	7.93	8.02	8.11	8.86	8.95	
	7.82	7.75	7.81	7.87	8.71	8.77	7.70	7.76	
	8.81	8.72	8.77	8.86	8.94	8.77	7.70	7.76	
Y4	8.14	8.19	8.24	7.93	8.02	8.11	8.83	8.76	
	7.82	7.75	7.81	7.87	8.71	8.77	8.86	8.95	
	8.81	8.72	8.77	8.86	8.94	8.77	7.70	7.76	
Y1	8.14	8.19	8.24	7.93	8.02	8.11	7.70	7.76	
	7.82	7.75	7.81	7.87	8.71	8.77	8.83	8.76	
	8.81	8.72	8.77	8.86	8.94	8.77	8.86	8.95	
Y2	8.14	8.19	8.24	7.93	8.02	8.11	7.70	7.76	
	7.82	7.75	7.81	7.87	8.71	8.77	7.70	7.76	
	8.81	8.72	8.77	8.86	8.94	8.77	8.83	8.76	
Y3	8.14	8.19	8.24	7.93	8.02	8.11	8.86	8.95	1,491.654
	7.82	7.75	7.81	7.87	8.71	8.77	7.70	7.76	
	8.81	8.72	8.77	8.86	8.94	8.77	7.70	7.76	
Y4	8.14	8.19	8.24	7.93	8.02	8.11	8.83	8.76	
	7.82	7.75	7.81	7.87	8.71	8.77	8.86	8.95	
	8.81	8.72	8.77	8.86	8.94	8.77	7.70	7.76	
Y1	8.14	8.19	8.24	7.93	8.02	8.11	7.70	7.76	
	7.82	7.75	7.81	7.87	8.71	8.77	8.83	8.76	
	8.81	8.72	8.77	8.86	8.94	8.77	8.86	8.95	
Y2	8.14	8.19	8.24	7.93	8.02	8.11	7.70	7.76	
	7.82	7.75	7.81	7.87	8.71	8.77	7.70	7.76	
	8.81	8.72	8.77	8.86	8.94	8.77	8.83	8.76	
Y3	8.14	8.19	8.24	7.93	8.02	8.11	8.86	8.95	1,497.109
	7.82	7.75	7.81	7.87	8.71	8.77	7.70	7.76	
	8.81	8.72	8.77	8.86	8.94	8.77	7.70	7.76	
Y4	8.14	8.19	8.24	7.93	8.02	8.11	8.83	8.76	
	7.82	7.75	7.81	7.87	8.71	8.77	8.86	8.95	
	8.81	8.72	8.77	8.86	8.94	8.77	7.70	7.76	
Y1	8.14	8.19	8.24	7.93	8.02	8.11	7.70	7.76	
	7.82	7.75	7.81	7.87	8.71	8.77	8.83	8.76	
	8.81	8.72	8.77	8.86	8.94	8.77	8.86	8.95	
Y2	8.14	8.19	8.24	7.93	8.02	8.11	7.70	7.76	
	7.82	7.75	7.81	7.87	8.71	8.77	7.70	7.76	
	8.81	8.72	8.77	8.86	8.94	8.77	8.83	8.76	
Y3	8.14	8.19	8.24	7.93	8.02	8.11	8.86	8.95	1,564.151
	7.82	7.75	7.81	7.87	8.71	8.77	7.70	7.76	
	8.81	8.72	8.77	8.86	8.94	8.77	7.70	7.76	
Y4	8.14	8.19	8.24	7.93	8.02	8.11	8.83	8.76	
	7.82	7.75	7.81	7.87	8.71	8.77	8.86	8.95	
	8.81	8.72	8.77	8.86	8.94	8.77	7.70	7.76	
Y1	8.14	8.19	8.24	7.93	8.02	8.11	7.70	7.76	1,585.062

	7.82	7.75	7.81	7.87	8.71	8.77	8.83	8.76
	8.81	8.72	8.77	8.86	8.94	8.77	8.86	8.95
Y2	8.14	8.19	8.24	7.93	8.02	8.11	7.70	7.76
	7.82	7.75	7.81	7.87	8.71	8.77	7.70	7.76
	8.81	8.72	8.77	8.86	8.94	8.77	8.83	8.76
Y3	8.14	8.19	8.24	7.93	8.02	8.11	8.86	8.95
	7.82	7.75	7.81	7.87	8.71	8.77	7.70	7.76
	8.81	8.72	8.77	8.86	8.94	8.77	7.70	7.76
Y4	8.14	8.19	8.24	7.93	8.02	8.11	8.83	8.76
	7.82	7.75	7.81	7.87	8.71	8.77	8.86	8.95
	8.81	8.72	8.77	8.86	8.94	8.77	7.70	7.76
Y1	8.14	8.19	8.24	7.93	8.02	8.11	7.70	7.76
	7.82	7.75	7.81	7.87	8.71	8.77	8.83	8.76
	8.81	8.72	8.77	8.86	8.94	8.77	8.86	8.95
Y2	8.14	8.19	8.24	7.93	8.02	8.11	7.70	7.76
	7.82	7.75	7.81	7.87	8.71	8.77	7.70	7.76
	8.81	8.72	8.77	8.86	8.94	8.77	8.83	8.76
Y3	8.14	8.19	8.24	7.93	8.02	8.11	8.86	8.95
	7.82	7.75	7.81	7.87	8.71	8.77	7.70	7.76
	8.81	8.72	8.77	8.86	8.94	8.77	7.70	7.76
Y4	8.14	8.19	8.24	7.93	8.02	8.11	8.83	8.76
	7.82	7.75	7.81	7.87	8.71	8.77	8.86	8.95
	8.81	8.72	8.77	8.86	8.94	8.77	7.70	7.76

1,586.474

Berdasarkan Tabel 5 terlihat bahwa nilai GCV paling kecil adalah sebesar 1,497109 dengan titik knot optimal adalah sebagai berikut

$$\bar{Y}_1 = (x_{11} : K_{11} = 8,14; x_{11} : K_{12} = 7,82; x_{11} : K_{13} = 8,81; x_{12} : K_{31} = 8,19; x_{12} : K_{32} = 7,75; x_{12} : K_{33} = 8,72; x_{13} : K_{51} = 8,24; x_{13} : K_{52} = 7,81; x_{13} : K_{53} = 8,77; x_{14} : K_{71} = 7,93; x_{14} : K_{72} = 7,87; x_{14} : K_{73} = 8,86; x_{21} : K_{21} = 8,02; x_{21} : K_{22} = 8,71; x_{21} : K_{23} = 8,94; x_{22} : K_{41} = 8,11; x_{22} : K_{42} = 8,77; x_{22} : K_{43} = 8,77; x_{23} : K_{61} = 7,70; x_{23} : K_{62} = 8,83; x_{23} : K_{63} = 8,86; x_{24} : K_{81} = 7,76; x_{24} : K_{82} = 8,76; x_{24} : K_{83} = 8,95)$$

$$\bar{Y}_2 = (x_{11} : K_{11} = 8,14; x_{11} : K_{12} = 7,82; x_{11} : K_{13} = 8,81; x_{12} : K_{31} = 8,19; x_{12} : K_{32} = 7,75; x_{12} : K_{33} = 8,72; x_{13} : K_{51} = 8,24; x_{13} : K_{52} = 7,81; x_{13} : K_{53} = 8,77; x_{14} : K_{71} = 7,93; x_{14} : K_{72} = 7,87; x_{14} : K_{73} = 8,86; x_{21} : K_{21} = 8,02; x_{21} : K_{22} = 8,71; x_{21} : K_{23} = 8,94; x_{22} : K_{41} = 8,11; x_{22} : K_{42} = 8,77; x_{22} : K_{43} = 8,77; x_{23} : K_{61} = 7,70; x_{23} : K_{62} = 8,83; x_{23} : K_{63} = 8,86; x_{24} : K_{81} = 7,76; x_{24} : K_{82} = 8,76; x_{24} : K_{83} = 8,95)$$

$$\bar{Y}_3 = (x_{11} : K_{11} = 8,14; x_{11} : K_{12} = 7,82; x_{11} : K_{13} = 8,81; x_{12} : K_{31} = 8,19; x_{12} : K_{32} = 7,75; x_{12} : K_{33} = 8,72; x_{13} : K_{51} = 8,24; x_{13} : K_{52} = 7,81; x_{13} : K_{53} = 8,77; x_{14} : K_{71} = 7,93; x_{14} : K_{72} = 7,87; x_{14} : K_{73} = 8,86; x_{21} : K_{21} = 8,02; x_{21} : K_{22} = 8,71; x_{21} : K_{23} = 8,94; x_{22} : K_{41} = 8,11; x_{22} : K_{42} = 8,77; x_{22} : K_{43} = 8,77; x_{23} : K_{61} = 7,70; x_{23} : K_{62} = 8,83; x_{23} : K_{63} = 8,86; x_{24} : K_{81} = 7,76; x_{24} : K_{82} = 8,76; x_{24} : K_{83} = 8,95)$$

$$\bar{Y}_4 = (x_{11} : K_{11} = 8,14; x_{11} : K_{12} = 7,82; x_{11} : K_{13} = 8,81; x_{12} : K_{31} = 8,19; x_{12} : K_{32} = 7,75; x_{12} : K_{33} = 8,72; x_{13} : K_{51} = 8,24; x_{13} : K_{52} = 7,81; x_{13} : K_{53} = 8,77; x_{14} : K_{71} = 7,93; x_{14} : K_{72} = 7,87; x_{14} : K_{73} = 8,86; x_{21} : K_{21} = 8,02; x_{21} : K_{22} = 8,71; x_{21} : K_{23} = 8,94; x_{22} : K_{41} = 8,11; x_{22} : K_{42} = 8,77; x_{22} : K_{43} = 8,77; x_{23} : K_{61} = 7,70; x_{23} : K_{62} = 8,83; x_{23} : K_{63} = 8,86; x_{24} : K_{81} = 7,76; x_{24} : K_{82} = 8,76; x_{24} : K_{83} = 8,95)$$

Model Regresi Nonparametrik Multirespon Spline *Truncated* Optimal

Pada Tabel 6 berikut ditampilkan nilai GCV pada semua model. Dilihat dari GCV optimal pada masing-masing model, nilai GCV minimum terdapat pada model regresi nonparametrik multirespon spline *truncated* linier 2 titik knot sebesar 1,320052.

Tabel 6 Nilai GCV Pada Masing-masing Model

Jumlah Knot	Nilai GCV
1 Knot	1,094418
2 Knot	1,320052
3 Knot	1,497109

Berdasarkan Tabel 6 model regresi nonparametrik multirespon spline *truncated* optimal adalah model regresi nonparametrik multirespon spline *truncated* linier dengan 1 titik knot. Hal ini dikarenakan model tersebut menghasilkan GCV yang paling kecil yaitu 1,320052

Sehingga estimasi model regresi nonparametrik multirespon spline *truncated* linier dengan 2 knot dapat ditulis kedalam bentuk persamaan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\hat{Y}_1 &= -10,52 + 38,50x_{11} - 10,94(x_{11} - 8,14)_+^1 + 19,37(x_{11} - 7,82)_+^1 + 40,33x_{21} \\ &\quad - 22,58(x_{21} - 8,09)_+^1 - 20,56(x_{21} - 8,66)_+^1 - 12,40x_{12} - 21,62(x_{12} - 8,19)_+^1 \\ &\quad - 35,78(x_{31} - 7,75)_+^1 - 2,91x_{22} + 23(x_{22} - 8,11)_+^1 - 11,90(x_{41} - 8,71)_+^1 \\ &\quad - 29,24x_{13} + 10,45(x_{13} - 8,24)_+^1 - 48,70(x_{51} - 7,81)_+^1 + 8,38x_{23} \\ &\quad + 9,37(x_{23} - 7,70)_+^1 + 14,44(x_{61} - 8,83)_+^1 + 30,78x_{14} - 8,34(x_{14} - 7,93)_+^1 \\ &\quad + 29,23(x_{71} - 7,87)_+^1 - 18,55x_{24} + 39,10(x_{14} - 7,76)_+^1 - 16,58(x_{24} - 8,95)_+^1 \\ \hat{Y}_2 &= -6,43 + 36,73x_{11} - 0,41(x_{11} - 8,14)_+^1 - 18,32(x_{11} - 7,82)_+^1 + 16,22x_{21} \\ &\quad - 10,93(x_{21} - 8,09)_+^1 - 11,28(x_{21} - 8,66)_+^1 - 22,46x_{12} + 14,18(x_{12} - 8,19)_+^1 \\ &\quad - 41,73(x_{31} - 7,75)_+^1 + 4,23x_{22} - 2,92(x_{22} - 8,11)_+^1 + 3,44(x_{41} - 8,71)_+^1 \\ &\quad + 27,02x_{13} - 7,91(x_{13} - 8,24)_+^1 - 16,19(x_{51} - 7,81)_+^1 - 0,23x_{23} \\ &\quad - 19,15(x_{23} - 7,70)_+^1 + 31,93(x_{61} - 8,83)_+^1 + 18,65x_{14} - 6,71(x_{14} - 7,93)_+^1 \\ &\quad + 19,54(x_{71} - 7,87)_+^1 + 6,89x_{24} - 28,66(x_{14} - 7,76)_+^1 + 14,55(x_{24} - 8,95)_+^1 \\ \hat{Y}_3 &= 14,48 + 32,03x_{11} + 0,31(x_{11} - 8,14)_+^1 - 30,53(x_{11} - 7,82)_+^1 + 91,62^*x_{21} \\ &\quad - 88,94^*(x_{21} - 8,09)_+^1 + 11,30(x_{21} - 8,66)_+^1 + 11,07x_{12} - 18,94(x_{12} - 8,19)_+^1 \\ &\quad - 53,61(x_{31} - 7,75)_+^1 + 23,06x_{22} + 7,91(x_{22} - 8,11)_+^1 - 9,42(x_{41} - 8,71)_+^1 \\ &\quad + 51,67x_{13} - 17,45(x_{13} - 8,24)_+^1 - 109,52^*(x_{51} - 7,81)_+^1 + 18,43x_{23} \\ &\quad + 78,37(x_{23} - 7,70)_+^1 + 11,23(x_{61} - 8,83)_+^1 - 40,77x_{14} + 31,64(x_{14} - 7,93)_+^1 \\ &\quad - 39,37(x_{71} - 7,87)_+^1 + 33,21x_{24} + 33,34(x_{14} - 7,76)_+^1 - 14,92(x_{24} - 8,95)_+^1 \\ \hat{Y}_4 &= 5,91 - 4,07x_{11} + 13,31(x_{11} - 8,14)_+^1 - 0,17(x_{11} - 7,82)_+^1 + 48,33x_{21} \\ &\quad - 36,62(x_{21} - 8,09)_+^1 + 3,68(x_{21} - 8,66)_+^1 + 2,62x_{12} - 20,66(x_{12} - 8,19)_+^1 \\ &\quad + 9,56(x_{31} - 7,75)_+^1 - 6,92x_{22} - 15,04(x_{22} - 8,11)_+^1 + 1,99(x_{41} - 8,71)_+^1 \\ &\quad - 6,51x_{13} - 7,16(x_{13} - 8,24)_+^1 - 62,77(x_{51} - 7,81)_+^1 + 17,03x_{23} \\ &\quad + 28,87(x_{23} - 7,70)_+^1 + 9,25(x_{61} - 8,83)_+^1 - 16,67x_{14} + 13,78(x_{14} - 7,93)_+^1 \\ &\quad - 16,01(x_{71} - 7,87)_+^1 + 15,58x_{24} + 40,04(x_{14} - 7,76)_+^1 - 19,19(x_{24} - 8,95)_+^1\end{aligned}$$

Ket : *) Signifikansi $\alpha = 5\%$

Pengujian secara parsial, menunjukkan bahwa pada model III dengan respon nilai UNAS Matematika variabel yang prediktor yang berpengaruh hanya nilai UAS dengan titik knotnya 8,09 dan nilai rata-rata rapor matematika 1. Model yang terbaik yang menjelaskan nilai UNAS SMKN 3 Buduran Sidoarjo adalah model spline linier dengan 2 knot dengan nilai GCV 1,320052 R^2 65,45%

2. Jika nilai UAS Bahasa Indonesia lebih kecil dari 8,09, maka nilai UAS Matematika tidak berpengaruh terhadap perubahan nilai UNAS Matematika. Tapi jika nilai UAS Bahasa Indonesia lebih besar 8,09, maka peningkatan nilai UAS Bahasa Indonesia berkontribusi terhadap nilai UNAS Matematika.

3. Jika nilai rata-rata rapor Matematika lebih kecil dari 7,81, maka nilai rata-rata rapor tidak berpengaruh terhadap perubahan nilai UNAS Matematika. Tapi jika nilai UAS Matematika lebih besar 7,81, maka peningkatan nilai rata-rata rapor Matematika terhadap nilai UNAS Matematika.

IV. KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan, dapat diambil beberapa kesimpulan yaitu:

1. Model regresi nonparametrik spline *truncated* multirespon dapat diestimasi dengan menggunakan metode *Weighted Least Square*.

Didapatkan $\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}[\mathbf{K}]\mathbf{Y}$, dengan $\mathbf{A}[\mathbf{K}] = \mathbf{X}[\mathbf{K}](\mathbf{X}^T\mathbf{W}\mathbf{X}[\mathbf{K}])^{-1}\mathbf{X}^T[\mathbf{K}]\mathbf{W}$

Dengan \mathbf{W} matriks varian kovarian dari \mathbf{Y} .

Estimator $\hat{\mathbf{Y}}$ bergantung pada titik-titik knot K . Titik knot optimum didapatkan dengan metode *Generalized Cross Validation* (GCV).

2. Dari aplikasi model regresi nonparametrik spline *truncated* multirespon pada data nilai UNAS SMKN 3 Buduran Sidoarjo terdapat pada model regresi nonparametrik multirespon spline *truncated* linier 2 titik knot.

$$\begin{aligned}\hat{Y}_1 = & -10,52 + 38,50x_{11} - 10,94(x_{11} - 8,14)_+^1 + 19,37(x_{11} - 7,82)_+^1 + 40,33x_{21} \\ & - 22,58(x_{21} - 8,09)_+^1 - 20,56(x_{21} - 8,66)_+^1 - 12,40x_{12} - 21,62(x_{12} - 8,19)_+^1 \\ & - 35,78(x_{31} - 7,75)_+^1 - 2,91x_{22} + 23(x_{22} - 8,11)_+^1 - 11,90(x_{41} - 8,71)_+^1 \\ & - 29,24x_{13} + 10,45(x_{13} - 8,24)_+^1 - 48,70(x_{51} - 7,81)_+^1 + 8,38x_{23} \\ & + 9,37(x_{23} - 7,70)_+^1 + 14,44(x_{61} - 8,83)_+^1 + 30,78x_{14} - 8,34(x_{14} - 7,93)_+^1 \\ & + 29,23(x_{71} - 7,87)_+^1 - 18,55x_{24} + 39,10(x_{14} - 7,76)_+^1 - 16,58(x_{24} - 8,95)_+^1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{Y}_2 = & -6,43 + 36,73x_{11} - 0,41(x_{11} - 8,14)_+^1 - 18,32(x_{11} - 7,82)_+^1 + 16,22x_{21} \\ & - 10,93(x_{21} - 8,09)_+^1 - 11,28(x_{21} - 8,66)_+^1 - 22,46x_{12} + 14,18(x_{12} - 8,19)_+^1 \\ & - 41,73(x_{31} - 7,75)_+^1 + 4,23x_{22} - 2,92(x_{22} - 8,11)_+^1 + 3,44(x_{41} - 8,71)_+^1 \\ & + 27,02x_{13} - 7,91(x_{13} - 8,24)_+^1 - 16,19(x_{51} - 7,81)_+^1 - 0,23x_{23} \\ & - 19,15(x_{23} - 7,70)_+^1 + 31,93(x_{61} - 8,83)_+^1 + 18,65x_{14} - 6,71(x_{14} - 7,93)_+^1 \\ & + 19,54(x_{71} - 7,87)_+^1 - 6,89x_{24} - 28,66(x_{14} - 7,76)_+^1 + 14,55(x_{24} - 8,95)_+^1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{Y}_3 = & 14,48 + 32,03x_{11} + 0,31(x_{11} - 8,14)_+^1 - 30,53(x_{11} - 7,82)_+^1 + 91,62^*x_{21} \\ & - 88,94^*(x_{21} - 8,09)_+^1 + 11,30(x_{21} - 8,66)_+^1 + 11,07x_{12} - 18,94(x_{12} - 8,19)_+^1 \\ & - 53,61(x_{31} - 7,75)_+^1 + 23,06x_{22} + 7,91(x_{22} - 8,11)_+^1 - 9,42(x_{41} - 8,71)_+^1 \\ & + 51,67x_{13} - 17,45(x_{13} - 8,24)_+^1 - 109,52^*(x_{51} - 7,81)_+^1 + 18,43x_{23} \\ & + 78,37(x_{23} - 7,70)_+^1 + 11,23(x_{61} - 8,83)_+^1 - 40,77x_{14} + 31,64(x_{14} - 7,93)_+^1 \\ & - 39,37(x_{71} - 7,87)_+^1 + 33,21x_{24} + 33,34(x_{14} - 7,76)_+^1 - 14,92(x_{24} - 8,95)_+^1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{Y}_4 = & 5,91 - 4,07x_{11} + 13,31(x_{11} - 8,14)_+^1 - 0,17(x_{11} - 7,82)_+^1 + 48,33x_{21} \\ & - 36,62(x_{21} - 8,09)_+^1 + 3,68(x_{21} - 8,66)_+^1 + 2,62x_{12} - 20,66(x_{12} - 8,19)_+^1 \\ & + 9,56(x_{31} - 7,75)_+^1 - 6,92x_{22} - 15,04(x_{22} - 8,11)_+^1 + 1,99(x_{41} - 8,71)_+^1 \\ & - 6,51x_{13} - 7,16(x_{13} - 8,24)_+^1 - 62,77(x_{51} - 7,81)_+^1 + 17,03x_{23} \\ & + 28,87(x_{23} - 7,70)_+^1 + 9,25(x_{61} - 8,83)_+^1 - 16,67x_{14} + 13,78(x_{14} - 7,93)_+^1 \\ & - 16,01(x_{71} - 7,87)_+^1 + 15,58x_{24} + 40,04(x_{14} - 7,76)_+^1 - 19,19(x_{24} - 8,95)_+^1\end{aligned}$$

ii. Nilai GCV yang paling optimal adalah 2 knot dengan GCV sebesar 1,320052 dan R^2 65,45%. Jika dibandingkan dengan 1 knot, GCV pada 1 knot lebih kecil dari 2 dan 3 knot, namun pada hasil R^2 pada 1 knot lebih kecil jika dibandingkan dengan 2 dan 3 knot, sehingga dipilih 2 knot sebagai GCV yang paling optimum selain itu juga pada 3 knot tidak diambil sebagai GCV yang optimum karena sangat sulit diinterpretasikan.

iii. Titik knot untuk respon nilai UNAS Matematika yaitu 8,09 untuk variabel UAS Bahasa Indonesia dan 7,81 untuk variabel nilai rata-rata rapor Matematika.

iv. Ketika dilakukan pengujian secara parsial pada respon nilai UNAS Matematika variabel prediktor yang berpengaruh hanya nilai rata-rata rapor Bahasa Indonesia dan nilai rata-rata rapor Matematika.

Saran

Berikut adalah saran yang dapat disampaikan berdasarkan hasil analisis dan pembahasan:

1. Pada penelitian ini hanya menggunakan dua variabel prediktor yaitu nilai rata-rata rapor dan nilai ujian akhir sekolah. Untuk penelitian selanjutnya bisa dikembangkan dengan menambahkan variabel-variabel yang diduga mempengaruhi seperti, jumlah jam belajar per hari, nilai rata-rata tryout, atau lainnya.
2. Pada penelitian ini hanya dilakukan sampai spline linier. Untuk penelitian selanjutnya bisa dikembangkan dengan spline kuadrat dan kubik.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Eubank, R.L., 1988, *Spline Smoothing and Nonparametric Regression*. New York: Marcel Dekker, New York
- [2] Budiantara, I.N., (2000), Metode U, GML, CV dan GCV Dalam Regresi Nonparametrik Spline, *Majalah Ilmiah himpunan Matematika Indonesia (MIHMI)*, 6:285-290.
- , (2006), Regresi Nonparametrik Dalam Statistika, *Makalah Pembicara Utama pada Seminar Nasional Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Makasar (UNM), Makasar.*
- [3] Hardle, W., (1990), *Applied Nonparametric Regression*, Cambridge University Press, New York.
- [4] Johnson dan Wichern, Rencher, A.C., (2002), *Methods of Multivariate Analysis. Second Edition*, Jhon Wiley & Sons, Inc. New York.
- [5] Wang, Y., Guo, W., dan Brown, M.B, (2000), “Spline Smoothing for Bivariate Data With Applications to Association Between Hormones”, *Statistica Sinica*, Vol. 10, hal 377-397.
- [6] Adyana, I.G., (2010), “*Estimator Spline Dalam Regresi Nonparametrik Multirespon (Studi Kasus Tingkat Kesejahteraan di Indonesia Tahun 2009)*”, Tesis, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.
- [7] Krusdayanti, W., (1999), *Analisis Faktor-78redic yang Mempengaruhi Hasil Belajar Siswa Kelas IV-V SD Muhammadiyah 4 Pucang*, TA, FMIPA, ITS.
- [8] Ernawati, (2008), *Multigroup Structural Equation Model Untuk Memandingkan Prestasi Belajar Siswa yang Berasal dari Sekolah Negeri dan Sekolah Swasta*, Tesis, FMIPA, ITS.
- [9] Sutarsih, S., (2008), *Pendekatan Regresi Spline untuk Memodelkan Nilai UNAS Siswa SMK Negeri 3 Buduruan Sidoarjo*, Tesis, FMIPA, ITS.
- [10] Henaulu, M. H, (2009), *Pemodelan Nilai UNAS Siswa SMA Negeri 11 Ambon dengan Pendekatan Regresi Nonparametrik Spline*, Tesis, FMIPA, ITS.
- [11] Fathurahman, M., (2011), Estimasi Parameter Model Regresi Spline, *Jurnal Eksponensial*, Vol. 2, No. 1, hal 53-58, FMIPA Mulawarman.
- [12] Draper and Smith, 1992, *Analisis Regresi Terapan*, PT Gramedia Pustaka Utama, Jakarta.
- [13] Walpole, R.E., Alih bahasa Ir. Bambang Sumantri (1982), *Pengantar Statistika*, Edisi ketiga. PT. Gramedia Pustaka Utama, Jakarta.
- [14] Diknas, (2007), *Permendiknas Nomor 20 Tahun 2007 tentang Standar Penilaian Pendidikan*, Jakarta: Depdiknas.
- [15] Rencher, A.C. dan Schaalje, G.B, (2008), *Linier Models in Statistics*, 2nd ed., America.
- [16] Ikhsan, Sadik, (2011), Penanganan Masalah Multiklonieritas dalam Pendugaan dan Analisis Fungsi Produksi UsahaTani Padi di Kabupaten Hulu Sungai Utara dengan Menggunakan Prosedur Regresi Komponen Utama, *Jurna Agrobisnis Perdesaan* 1(4): 250.